ISSN 0203-3755

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Том 9 (37), №4

2019

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Министерство образования и науки Российской Федерации
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского

Математический журнал

Том 9(37), №4, 319-436.
Печатается по решению Научно-технического Совета КФУ протокол №9 от 30.12.2019.

ISSN 0203–3755

Адрес редакционной коллегии: Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, к. 203В, пр-т Вернадского, 4, Симферополь 295007, Россия.
Тел. +7 978 7715582. E-mail: dynsys2011@yandex.ru

Свидетельство о регистрации средства массовой информации — ПИ №ФС77-61810, выдано 18.05.15.

Динамические системы, 2019, том 9(37), №4, 321–366

MSC 2010: 34G10, 47D06, 34K30, 47A55

Product approximation of solution operators for non-autonomous Cauchy problems

V. A. Zagrebnov
Institut de Mathématiques de Marseille,
13453 Marseille, France. *E-mail: valentin.zagrebnov@univ-amu.fr*

Abstracts. Studying product approximations of the non-autonomous Cauchy problem (nACP) solution operator in a Banach space X we use the Howland-Evans-Neidhardt approach. The main idea is to reformulate this problem as an autonomous Cauchy problem (ACP) in an extended Banach space $L^p(\mathcal{I}, X)$, $p \in [1, \infty)$, of X-valued functions on the time-interval $\mathcal{I}$. A fundamental observation is the one-to-one correspondence between solution operators of nACP on X and the evolution semigroups of ACP on $L^p(\mathcal{I}, X)$. We show that this relation allows to apply a full power of the operator-theoretical methods to scrutinise the nACP, including the proof of the product approximation formulae for solution operators with operator-norm estimate of the rate of convergence.

Keywords: Trotter product formula, convergence rate, approximation, evolution equations, solution operator, extension theory, perturbation theory, operator splitting.

1. Introduction

The theory of evolution equations plays an important role in various areas of pure and applied mathematics, physics and other natural sciences. Since the early 1950s, starting with papers by T. Kato [12] and R.S. Phillips [22], research in this field became very active and it still enjoys a lot of attention. A comprehensive introduction to this topic is presented in [7, Chapter VI. 9.] and also in the book by W. Tanabe [26].

A general Cauchy problem for linear non-autonomous evolution equations in a Banach space has the form

$$\dot{u}(t) = -C(t)u(t), \quad u(s) = u_s \in X, \quad 0 < s \leq t \leq T, \tag{1.1}$$

where $\{C(t)\}_{t \in \mathcal{I}}$ is a one-parameter (time-dependent) family of closed linear operators in the separable Banach space X. Here the time-interval $\mathcal{I} := [0, T] \subset \mathbb{R}$ and we also introduce $\mathcal{I}_0 := (0, T]$. To solve the non-autonomous Cauchy problem (nACP) (1.1) means to find a so-called *solution operator* (or *propagator*): $\{U(t, s)\}_{(t,s) \in \Delta}$, $\Delta := \{(t, s) \in \mathcal{I}_0 \times \mathcal{I}_0 : 0 < s \leq t \leq T\}$, with the property that $u(t) = U(t, s)u_s$, $(t, s) \in \Delta$, is in a certain sense a solution of the problem (1.1) for an appropriate set of initial data u_s.

By definition, propagator $\{U(t, s)\}_{(t,s) \in \Delta}$ is supposed to be a strongly continuous operator-valued function $U(\cdot, \cdot) : \Delta \to \mathscr{L}(X)$ satisfying the properties:

$$\begin{aligned}
&U(t,t) = I \quad \text{for} \quad t \in \mathcal{I}_0 \ , \\
&U(t,r)U(r,s) = U(t,s) \quad \text{for} \quad t, r, s \in \mathcal{I}_0 \quad \text{with} \quad s \leq r \leq t \ , \\
&\|U\|_{\mathscr{L}(X)} := \sup_{(t,s) \in \Delta} \|U(t,s)\|_{\mathscr{L}(X)} < \infty \ ,
\end{aligned}$$

where $\mathscr{L}(X)$ denotes the space of bounded linear operators on X. For details see Definition 3.5 in §3.1.

We note that there are essentially two different approaches to solve the abstract linear nACP (1.1) in the normed vector spaces.

The first method consists of approximation of the operator family $\{C(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ by operators $\{\{C_n(t)\}_{t\in\mathcal{I}}\}_{n\in\mathbb{N}}$, for which the corresponding Cauchy problem

$$\dot{u}(t) = -C_n(t)u(t), \quad u(s) = u_s \in X, \quad 0 < s \le t \le T$$

can be easily solved. Often, the family of operators $\{C(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ is approximated by a piecewise constant operators, see T. Kato [13, 14]. Then one encounters the problem: In which sense the sequence of approximating propagators $\{\{U_n(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converges to the solution operator $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ of the nACP (1.1) ?

Another approach which allows to solve the problem (1.1) using perturbation, or extension theory for linear operators is due to Howland-Evans-Neidhardt [9, 8, 16]. It does not need any approximation scheme, for introduction see e.g [7, 19]. This approach is quite flexible and can be used in very general settings. Its main idea can be described as follows:

The nACP in X can be reformulated as an *autonomous* Cauchy problem (ACP) in a new Banach space $L^p(\mathcal{I}, X)$, $p \in [1, \infty)$, of p-summable functions on the time-interval $\mathcal{I}$ with values in the Banach space X.

In the second approach a central notion is the *evolution generator* $\mathcal{K}$ on $L^p(\mathcal{I}, X)$. It generates a semigroup $\{\mathcal{U}(\tau) = e^{-\tau\mathcal{K}}\}_{\tau\ge 0}$ on $L^p(\mathcal{I}, X)$ which is called an *evolution semigroup*. In turn the evolution semigroup on $L^p(\mathcal{I}, X)$ is entirely defined by propagator $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ in such a way that the representation

$$(e^{-\tau\mathcal{K}}f)(t) = (\mathcal{U}(\tau)f)(t) = \begin{cases} U(t, t-\tau)f(t-\tau), & \text{if } t \in (\tau, T] \ , \\ 0, & \text{if } 0 \le t \le \tau \ , \end{cases} \tag{1.2}$$

holds for any $f \in L^p(\mathcal{I}, X)$. In the following we use the short notation

$$(e^{-\tau\mathcal{K}}f)(t) = (\mathcal{U}(\tau)f)(t) = U(t, t-\tau)\chi_{\mathcal{I}}(t-\tau)f(t-\tau)$$

where $\chi_{\mathcal{I}}(\cdot)$ is the characteristic function of the interval $\mathcal{I}$. It turns out that there is a one-to-one correspondence between the set of all evolution generators and the set of all propagators. Moreover, the important observation is that the set of all evolution generators in $L^p(\mathcal{I}, X)$ can be characterised quite independently from propagators, see Theorem 3.3.

Notice that in this paper we use a definition of the generator of a semigroup which differs from the usual one by the sign, see (1.2). It turns out that this choice of definition is more convenient for our presentation.

The first problem we have to solve is: How to find the evolution generator for a nACP (1.1) ? To this aim we introduce the so-called *evolution pre-generator*

$$\widetilde{\mathcal{K}} = D_0 + \mathcal{C}, \quad \mathrm{dom}(\widetilde{\mathcal{K}}) = \mathrm{dom}(D_0) \cap \mathrm{dom}(\mathcal{C}) \subset L^p(\mathcal{I}, X) \ ,$$

where D_0 is the generator of the right-shift semigroup and $\mathcal{C}$ is the multiplication operator induced by the operator family $\{C(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ in $L^p(\mathcal{I}, X)$. Appropriate assumptions on the family $\{C(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ guarantee that operator $\mathcal{C}$ is a generator in $L^p(\mathcal{I}, X)$. If $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ is the solution operator of the nACP (1.1), then it turns out that the generator $\mathcal{K}$ of the associated evolution semigroup $\{\mathcal{U}(\tau)\}_{\tau\geq 0}$ defined by (1.2) is a closed operator extension of the evolution pre-generator $\widetilde{\mathcal{K}}$. Conversely, if the evolution pre-generator $\widetilde{\mathcal{K}}$ admits a closed extension, which is an evolution generator, then the corresponding propagator $\{U(t,s\}_{[t,s)\in\Delta}$ can be regarded as a solution operator of the nACP (1.1).

In general, it is difficult to answer the question: whether an evolution pre-generator admits a closed extension, which is an evolution generator ? However, the problem simplifies if the pre-generator is closable and its closure is a generator. In this case one gets that the closure is already an *evolution generator*. Then obviously the evolution pre-generator admits only *one* extension, which is a generator and, hence, which is an evolution generator. This means, that the nACP (1.1) is solvable and even uniquely.

From the point of view of the operator theory the problem formulated above fits into the question: whether the sum of two generators is *essentially* a generator, i.e. whether the closure of the sum of two generators is a generator.

If the sum of two generators A and B of contractions semigroups in some Banach space is essentially a generator, then the *Trotter product formula*

$$e^{-\tau C} = \mathrm{s}-\lim_{n\to\infty} (e^{-\tau A/n}e^{-\tau B/n})^n, \quad C := \overline{A+B}\ ,$$

in the *strong* operator topology, is valid for the closure $\overline{A+B}$. This formula goes back to Sophus Lie (1875) for bounded linear operators. Later it was generalised by H. Trotter to unbounded generators of contraction semigroups, see [27]. The formula admits a further generalisation to an arbitrary pair $\{A, B\}$ of generators of semigroups if their semigroups satisfy a so-called Trotter *stability* condition, cf. Proposition 5.7.

Note that generalisation [27] says nothing about the convergence-rate of the Trotter product formula and by consequence about the error-bound for approximation of solution operators. To this aim one has to consider the convergence of the Trotter product formula in the operator-norm topology. For the case of Banach spaces see [5]. However, in [5] the operator A was assumed to be a generator of a holomorphic semigroup. In our case, this assumption is not satisfied for a principal reason: the evolution semigroup (1.2) can never be a holomorphic semigroup! Nevertheless, some observations of [5] admit a generalisation to the case of evolution semigroups. We discuss this point in Remark 7.10.

Finally, after having determined the convergence rate of the Trotter product formula in the operator-norm, one has to carry over this result to the propagator approximations. It turns out that the Trotter product formula yields an approximation of the propagator $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ in the operator norm, which has (uniformly in Δ) the *same* convergence-rate as the Trotter product formula for the evolution semigroup, see Theorems 7.8 and 7.11.

We express a hope that these results might be useful in applications since they give a uniform error estimate for a discretized approximation of the solution operator $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ for the nACP (1.1), see §7. In particular, it concerns the numerical simulations, where as a palliative approach one uses some domain-dependent error estimates for operator *splitting* schemes in the strong operator topology [3].

Now we give an overview of the contents of the paper in more details. Our aim is analysis a linear nACP of the form

$$\dot{u}(t) = -Au(t) - B(t)u(t), \quad u(s) = u_s \in X, \quad 0 < s \le t \le T \ , \tag{1.3}$$

where A is a generator of a bounded holomorphic semigroup and $\{B(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ is a family of the closed (for any time-interval $\mathcal{I} = [0,T]$) linear operators in X. To proceed we make the following assumptions:

Assumption 1.1. Let $\alpha \in (0,1)$ and X be a (separable) Banach space.

(A1) The operator A is a generator of a bounded holomorphic semigroup of class $\mathcal{G}(M_A, 0)$ ([15], Ch.IX, §1.4) with zero in the resolvent set: $0 \in \varrho(A)$.

(A2) The operators $\{B(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ are densely defined and closed for a.e. $t \in \mathcal{I}$ and it holds that $\mathrm{dom}(A) \subset \mathrm{dom}(B(t))$ for a.e. $t \in \mathcal{I}$. Moreover, for all $x \in \mathrm{dom}(A)$ the function $t \mapsto B(t)x$ is strongly measurable.

(A3) For a.e. $t \in \mathcal{I}$ and some $\alpha \in (0,1)$ we demand that $\mathrm{dom}(A^\alpha) \subset \mathrm{dom}(B(t))$ and that

$$C_\alpha := \text{ess sup}_{t\in\mathcal{I}} \|B(t)A^{-\alpha}\|_{\mathscr{L}(X)} < \infty \ .$$

(A4) Let $\{B(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ be a family of generators in X that for all $t \in \mathcal{I}$ belong to the same class $\mathcal{G}(M_B, \gamma_B)$. The function $\mathcal{I} \ni t \mapsto (B(t) + \xi I)^{-1}x \in X$ is strongly measurable for any $x \in X$ and any $\xi > \gamma_B$.

(A5) We assume that $\mathrm{dom}(A^*) \subset \mathrm{dom}(B(t)^*)$ and

$$C_1^* := \ \text{ess sup}_{t\in\mathcal{I}} \|B(t)^*(A^*)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X^*)} < \infty,$$

where A^* and $B(t)^*$ denote operators which are adjoint of A and $B(t)$, respectively.

(A6) There exists $\beta \in (\alpha, 1)$ and a constant $L_\beta > 0$ such that for a.e. $t, s \in \mathcal{I}$ one has the estimate:

$$\|A^{-1}(B(t) - B(s))A^{-\alpha}\|_{\mathscr{L}(X)} \le L_\beta |t-s|^\beta \ .$$

We comment here that, the assumptions (A4) and (A3) imply assumption (A2). So, assuming (A4) and (A3) we can drop the assumption (A2).

Let $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ be the multiplication operators *induced* by A and $\{B(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ in $L^p(\mathcal{I}, X)$. Further let D_0 be the generator of the right-shift semigroup in $L^p(\mathcal{I}, X)$. Note that since A is a semigroup generator in X, the operator $\mathcal{A}$ in the space $L^p(\mathcal{I}, X)$ is also a generator. Moreover, the semigroup $\{e^{-\tau\mathcal{A}}\}_{\tau\ge 0}$ commutes with the semigroup $\{e^{-\tau D_0}\}_{\tau\geq 0}$. Therefore, the product $\{e^{-\tau\mathcal{A}}e^{-\tau D_0}\}_{\tau\geq 0}$ defines a semigroup and its generator is denoted by $\mathcal{K}_0$. Note that $\mathcal{K}_0 = \overline{D_0+\mathcal{A}}$, i.e. a closure of the operator sum $D_0 + \mathcal{A}$. In general, domain of the generator $\mathcal{K}_0$ can be larger than $\mathrm{dom}(\mathcal{A}) \cap \mathrm{dom}(D_0)$. A widely used assumption about the operator A is its *maximal parabolic regularity*, see [1, 23, 24, 2]. This means that the operator sum $D_0 + \mathcal{A}$ is already closed, i.e. $\mathcal{K}_0 = D_0+\mathcal{A}$ and $\mathrm{dom}(\mathcal{K}_0) = \mathrm{dom}(\mathcal{A})\cap\mathrm{dom}(D_0)$. In this paper the maximal parabolic regularity is *not* supposed for our purposes.

Now our first of the main results can be formulated as follows:

Theorem 1.2. Let the assumptions (A1), (A2) and (A3) be satisfied. Then, the operator $\mathcal{K} := \mathcal{K}_0+\mathcal{B}$ with $\mathrm{dom}(\mathcal{K}) = \mathrm{dom}(\mathcal{K}_0)\cap\mathrm{dom}(\mathcal{B})$, is an evolution generator in $L^p(\mathcal{I}, X)$, $p \in [1,\infty)$, and the non-autonomous Cauchy problem (1.3) has a unique solution operator $\{U(t, s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ in the sense of Definition 3.5.

The proof of this theorem mainly uses a perturbation theory due to J.Voigt [28], see Proposition 4.2. Note that the theorem holds without assuming that operators $\{B(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ are generators.

We comment that if the assumption (A4) is satisfied, then the induced multiplication operator $\mathcal{B}$ becomes a generator that also belongs to $\mathcal{G}(M_B, \beta_B)$. A pair $\{\mathcal{B},\mathcal{K}_0\}$ is called *Trotter-stable* if it satisfies the condition

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{\tau\geq 0}\left\|\left(e^{-\tau\mathcal{B}/n}e^{-\tau\mathcal{K}_0/n}\right)^n\right\| < \infty \ .$$

If the pair $\{\mathcal{B},\mathcal{K}_0\}$ is Trotter-stable, then by the Trotter product formula the evolution semigroup $\{e^{-\tau\mathcal{K}}\}_{\tau\geq 0}$ admits the representation

$$e^{-\tau\mathcal{K}} = \mathrm{s}-\lim_{n\to\infty}\,(e^{-\tau\mathcal{B}/n}e^{-\tau\mathcal{K}_0/n})^n. \tag{1.4}$$

It turns out that the pair $\{\mathcal{B},\mathcal{K}_0\}$ is Trotter-stable if the operator family $\{B(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ is stable with respect to A (see Definition 5.5). Let us mention here that the pair $\{\mathcal{B},\mathcal{K}_0\}$ is Trotter-stable if and only if the pair $\{\mathcal{K}_0,\mathcal{B}\}$ is Trotter-stable, i.e. the estimate:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{\tau\geq 0}\left\|\left(e^{-\tau\mathcal{K}_0/n}e^{-\tau\mathcal{B}/n}\right)^n\right\| < \infty \ ,$$

holds. In particular this yields that one can interchange operators $\mathcal{K}_0$ and $\mathcal{B}$ in formula (1.4). Note that Trotter stability condition is always satisfied for generators of contraction semigroups.

Let $\{U(t, s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ be the propagator corresponding to the evolution semigroup $\{e^{-\tau\mathcal{K}}\}_{\tau\geq 0}$ via (1.2). Then the Trotter product formula yields an approximation of the propagator $\{U(t, s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ in the strong operator topology and we prove in this paper the following assertion:

Theorem 1.3. Let the assumptions (A1), (A3) and (A4) be satisfied. If the family $\{B(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ is stable with respect to A (see Definition 5.5), then

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\tau\in\mathcal{I}}\int_0^{T-\tau}\|\{U_n(s+\tau, s) - U(s+\tau, s)\}x\|^p_X ds = 0, \quad x \in X, \tag{1.5}$$

for any $p \in [1, \infty)$, where the Trotter product approximation $\{\{U_n(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}\}_{n\in\mathbb{N}}$ is defined by

$$
\begin{aligned}
U_n(t,s) &:= \prod_{j=1}^{n\leftarrow} G_j(t,s\,;n), \quad n = 1, 2, \dots\ , \\
G_j(t,s\,;n) &:= e^{-\frac{t-s}{n}B(s+j\frac{t-s}{n})}e^{-\frac{t-s}{n}A}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n,
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

$(t,s) \in \Delta$, with the increasingly ordered product in j from the right to the left.

Our second main result shows that the convergence in (1.5) can be improved from the *strong* to the *operator-norm* topology and that the *convergence-rate* can be estimated from above.

Theorem 1.4. Let the assumptions (A1), (A3), (A4), (A5), and (A6) be satisfied. If the family of generators $\{B(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ is stable with respect to A and $\beta \in (\alpha, 1)$, then there is a constant $C_{\alpha,\beta} > 0$ such that

$$
\operatorname*{ess\,sup}_{(t,s)\in\Delta} \|U_n(t,s) - U(t,s)\|_{\mathscr{L}(X)} \le \frac{C_{\alpha,\beta}}{n^{\beta-\alpha}}, \quad n = 2, 3, \dots\ . \tag{1.7}
$$

Now few remarks are in order. The paper [11] suggests that if both A and $B(t)$ are positive self-adjoint operators in a Hilbert space and if the operators $\{B(t)\}_{t\ge0}$ are Kato-*infinitesimally*-small with respect to A, then a operator norm convergence rate $O(\ln(n)/n)$ instead of (1.7) might be possible.

On the other hand, in [3, 4] Bátkai *et al* investigated approximations of solution operators for non-autonomous evolution equations by a different type of so-called *operator splittings* in the *strong* operator topology. They include, as particular, symmetrised/non-symmetrised time-dependent Trotter product approximations in the strong operator topology studied by [29, 30], as well as some other Trotter-Kato product formulae, see e.g. [18]. In the first paper [3], the authors proved the strong operator convergence and established for the non-autonomous parabolic case an optimal *domain-dependent* convergence rate for the (sequential) splitting approximation. The second paper [4] is devoted to a detailed analysis of the case of bounded perturbations.

Equation (1.3) describes various problems related to the linear nACP. As an example, we consider in §8 the diffusion equation perturbed by a time-dependent $t \mapsto V(t,\cdot)$ scalar potential:

$$
\dot u(t) = \Delta u(t) - V(t,x)u(t), \quad u(s) = u_s \in L^q(\Omega), \quad 0 < s \le t \le T,\ x \in \Omega, \tag{1.8}
$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ is a bounded domain with C^2- boundaries and $q \in (1, \infty)$. Let

$$
V(t,x) : \mathcal{I} \times \Omega \to \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}(V(t,x)) \ge 0 \ \text{ for t} \in \mathcal{I},\ \text{a.e. } x \in \Omega.
$$

be a measurable scalar time-dependent potential. Assuming regularity of the potential $V(t,x)$, the conditions (A3), (A5) and (A6) can be satisfied. As an example for the case of $d = 3$, we have the following theorem.

Theorem 1.5. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ be a bounded domain with C^2-boundary. Let $\alpha \in (0, 1/2)$ and $q \in (3, 3/2\alpha)$. Choose $\varrho \in [3/(2\alpha), \infty]$, $\beta \in (\alpha, 1)$ and $\tau \in [3/(2\alpha + 2), \infty]$. Let $B(t)f = V(t, \cdot)f$ define a scalar-valued multiplication operator in $X = L^q(\Omega)$ with $V \in L^\infty(\mathcal{I}, L^\varrho(\Omega)) \cap C^\beta(\mathcal{I}, L^\tau(\Omega))$ and $\mathrm{Re}(V(t, x)) \geq 0$. Then, the evolution problem (1.8) has a unique solution operator $\{U(t, s)\}_{(t,s)\in\Delta}$, which admits the approximation

$$\sup_{(t,s)\in\Delta} \|U_n(t, s) - U(t, s)\|_{\mathscr{L}(L^q(\Omega))} = O(n^{-(\beta-\alpha)}),$$

where for $(t, s) \in \Delta$ the approximating propagator $U_n(t, s)$ is defined by the product formula

$$U_n(t, s) := \prod_{j=1}^{n\leftarrow} G_j(t, s), \quad n = 1, 2, \dots ,$$

$$G_j(t, s\,; n) := e^{-\frac{t-s}{n} V(s+j\frac{t-s}{n}, \cdot)} e^{\frac{t-s}{n}\Delta}, \quad j = 1, 2, \dots, n \ .$$

The conditions for other values of the parameters when $d \geq 2$, $q \in (1, \infty)$, are formulated in §8.

This paper is organised as follows. In §2 we summarise some basic facts about the semigroup theory, the fractional powers of operators and the multiplication operators. In §3, we describe our approach to solution of the nACPs. In §4 the existence of unique solution operator for our case of the linear nACP is proved. §5 presents the basic properties of stability, whereas §6 investigates convergence of the Trotter-type product approximations in the strong topology. §7 contains the proof of the lifting of these convergence to the operator-norm topology. An application to a non-stationary diffusion equation is the subject of §8.

2. Recall from the theory of semigroups

Below we recall some basic facts from the operator and semigroup theory, which are indispensable for our presentation below.

Throughout this paper we are dealing with a separable Banach space denoted by $(X, \|\cdot\|_X)$. Let S and T be two operators in X. If $\mathrm{dom}(S) \subset \mathrm{dom}(T)$ and there are constants $a, b \geq 0$ such that

$$\|Tx\|_X \leq a\|Sx\|_X + b\|x\|_X, \quad x \in \mathrm{dom}(S),$$

then the operator T is called S-bounded with the relative bound a.

We define the resolvent of operator A by $R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1} : X \to \mathrm{dom}(A)$ when λ is from the resolvent set $\varrho(A)$. A family $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ of bounded linear operators on the Banach space X is called a strongly continuous (one-parameter) semigroup if it satisfies the functional equation

$$T(0) = I, \quad T(t + s) = T(t)T(s), \quad t, s \geq 0,$$

and the orbit maps $[0, \infty) \ni t \mapsto T(t)x$ are continuous for every $x \in X$. In the following we simply call them semigroups.

For a given semigroup its generator is a linear operator defined by the limit

$$Ax := \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h}(x - T(h)x)$$

on domain

$$\mathrm{dom}(A) := \{x \in X : \lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h}(x - T(h)x) \;\text{ exists}\}.$$

Note that in our definition of the semigroup *generator* differs from the *standard* one by the sign minus, cf. [15].

It is well-known that the generator of a strongly continuous semigroup is a closed and densely defined linear operator, which uniquely determines the semigroup (see e.g. [7, Theorem I.1.4]). For a given generator A we will write $\{T(t) = e^{-tA}\}_{t \geq 0}$, for the corresponding semigroup.

Recall that for any semigroup $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ there are constants M_A, γ_A, such that it holds $\|T(t)\| \leq M_A e^{\gamma_A t}$ for all $t \geq 0$. These semigroups are known as *quasi-bounded* of class $\mathcal{G}(M_A, \gamma_A)$ and following the Kato book we write that $A \in \mathcal{G}(M_A, \gamma_A)$ for its generator [15, Ch.IX]. If $\gamma_A \leq 0$, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ is called a *bounded* semigroup. For any semigroup we can construct a bounded semigroup by adding operator νI for some constant $\nu \geq \gamma_A$ to its generator. Then the operator $\widetilde{A} := A + \nu I$ generates a bounded semigroup $\{\widetilde{T}(t)\}_{t \geq 0}$ with $\|\widetilde{T}(t)\| \leq M_A$. If $\|T(t)\| \leq 1$, the semigroup is called a *contraction* semigroup and correspondingly a *quasi-contraction* semigroup, if the property $\|T(t)\| \leq e^{\gamma_A t}$ holds.

It is known (see [15, Ch.IX]) that for a generator $A \in \mathcal{G}(M_A, \gamma_A)$ the open half plane $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < -\gamma_A\}$ is contained in the resolvent set $\varrho(A)$ of A and one has the estimate $\|R(\lambda, A)^k\| \leq M_A/(-\mathrm{Re}(\lambda) - \gamma_A)^k$ for the resolvent $R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}$ and the natural $k \in \mathbb{N}$. Note that if $A \in \mathcal{G}(M_A, \gamma_A)$, then $\widetilde{A} = A + \nu I \in \mathcal{G}(M_A, \gamma_A - \nu)$. Therefore, the open half-plane $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < \nu - \gamma_A\}$ is contained in the resolvent set $\varrho(\widetilde{A})$.

Note that the semigroup $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ on X is called a *bounded holomorphic* semigroup if its generator A satisfies: $\mathrm{ran}(T(t)) \subset \mathrm{dom}(A)$ for all $t > 0$, and $\sup_{t>0} \|tAT(t)\| \leq M < \infty$. Recall, that in this case the bounded semigroup $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ has a unique analytic continuation into the open sector $\{z \in \mathbb{C} \backslash \{0\} : |\arg(z)| < \delta(M) \leq \pi/2\} \subset \mathbb{C}$ of the angle $\delta(M) > 0$, which is a monotonously decreasing function of M such that $\lim_{M \to \infty} \delta(M) = 0$, see, e.g., [31, Ch.1.5]. For a short recall from the perturbation theory of semigroups see, e.g., [32, Ch.1.7] and §4 below.

2.1. Fractional powers

We recall here some facts about the fractional powers of linear operators, see e.g. [21, Chapter 2.6]. To this end assume that A is a generator of a bounded holomorphic semigroup $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0}$ and $0 \in \varrho(A)$. Then the fractional power for $\alpha \in (0,1)$ is defined by

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-tA} dt \ ,$$

where $\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ is the Bernoulli gamma-function. Moreover, we define $A^0 = I$. Thus, the operator family $\{A^{-\alpha}\}_{\alpha\geq 0}$ defines a semigroup of bounded linear operators and the operators $A^{-\alpha}$ for $\alpha > 0$ are invertible [21, 2.6.5-6]. So, for $\alpha \geq 0$ we can define $A^\alpha := (A^{-\alpha})^{-1}$. With this definition, we get $\mathrm{dom}(A^\alpha) \subset \mathrm{dom}(A^\beta)$ for $\alpha \geq \beta > 0$. In particular, we have $\mathrm{dom}(A) \subset \mathrm{dom}(A^\alpha)$ for every $\alpha \in (0,1)$.

The following facts are also well-known.

Proposition 2.1. Let A be generator of a bounded holomorphic semigroup.

(i) Then there is a constant C_0 such that for all $\mu > 0$ it holds

$$\|A^\alpha (A + \mu I)^{-1}\| \leq C_0 \mu^{\alpha-1}.$$

(ii) For $\mu > 0$ and $0 < \alpha < 1$ it holds that

$$\mathrm{dom}((A + \mu I)^\alpha) = \mathrm{dom}(A^\alpha)$$

One of the basic tool for analysis of bounded holomorphic evolution semigroups is summarised by the following proposition.

Proposition 2.2 ([21, Theorem 2.6.13]). Let A be generator of a bounded holomorphic semigroup $U(z)$ and $0 \in \varrho(A)$. Then for $0 < \alpha$, we get

$$\sup_{t>0} \|t^\alpha A^\alpha U(t)\| = M_\alpha^A < \infty.$$

2.2. Multiplication operators

Let $\mathcal{I} = [0,T]$ be a compact interval. We consider the Banach spaces $L^p(\mathcal{I}, X)$, $p \in [1,\infty)$, of Lebesgue p-summable X-valued functions. The dual space $L^p(\mathcal{I}, X)^*$ of $L^p(\mathcal{I}, X)$ is defined by the sesquilinear duality relation $\langle \cdot, \cdot \rangle$, which generates bounded functionals:

$$L^p(\mathcal{I}, X) \times L^p(\mathcal{I}, X)^* \ni (f, \Gamma) \mapsto \langle f, \Gamma \rangle \in \mathbb{C} \ .$$

Then the following statement characterises the space $L^p(\mathcal{I}, X)^*$.

Proposition 2.3 ([6, Theorem 1.5.4]). Let $1 \leq p < \infty$, and let p' be defined by $(p')^{-1} + (p)^{-1} = 1$. Then for each $\Gamma \in L^p(\mathcal{I}, X)^*$ there exists a function $\Psi : \mathcal{I} \to X^*$ such that :

(i) Ψ is w^*-measurable, i.e. measurable are the functions $t \mapsto \langle f(t), \Psi(t) \rangle$ for all $f \in L^p(\mathcal{I}, X)$,

(ii) The function $\|\Psi(\cdot)\|_{X^*} : t \mapsto \|\Psi(t)\|_{X^*}$ is measurable and belongs to $L^{p'}(\mathcal{I})$,

(iii) If $\langle f, \Gamma \rangle = \int_{\mathcal{I}} dt \langle f(t), \Psi(t) \rangle$ for all $f \in L^p(\mathcal{I}, X)$, then $\|\Gamma\| = \| \, \|\Psi(\cdot)\|_{X^*} \, \|_{L^{p'}}$.

Conversely, each w^*-measurable function $\Psi : \mathcal{I} \to X^*$, for which there is $g \in L^{p'}(\mathcal{I})$ such that $\|\Psi(t)\|_{X^*} \leq g(t)$ for a.e. $t \in \mathcal{I}$, induces by (iii) a continuous linear functional Γ on $L^p(\mathcal{I}, X)$, whose norm is less than or equal to $\|g\|_{L^{p'}}$.

An important role plays in the following the so-called *multiplication* operators on the Banach space $L^p(\mathcal{I}, X)$, $p \in [1, \infty)$. A function $\phi \in L^\infty(\mathcal{I})$ defines a multiplication operator $M(\phi)$ on $L^p(\mathcal{I}, X)$ by

$$(M(\phi)f)(t) := \phi(t)f(t) \ \text{ for a.e. } t \in \mathcal{I}, \ \ \mathrm{dom}(M(\phi)) = L^p(\mathcal{I}, X).$$

Moreover, let $C(\mathcal{I}, X)$ be the Banach space of all continuous functions $f : \mathcal{I} \longrightarrow X$ endowed with the supremum norm. By $C_0(\mathcal{I}, X)$ we denote the subspace of $C(\mathcal{I}, X)$ of all continuous functions, which vanish at $t = 0$.

Definition 2.4. We say the set $\mathcal{D} \subset L^p(\mathcal{I}, X)$ has a dense *cross-section* in X if

(i) $\mathcal{D} \subset L^p(\mathcal{I}, X) \cap C(\mathcal{I}, X)$,

(ii) for any $t \in \mathcal{I}_0$ the set $[\mathcal{D}]_t := \{x \in X : \exists f \in \mathcal{D} \text{ such that } \widehat{f}(t) = x\}$ is dense in X , where $\widehat{f}$ denotes the unique *continuous* representative of $f \in \mathcal{D}$.

Using definition of the multiplication operator $M(\phi)$ and the cross-section density property we find a condition when a linear set is dense in $L^p(\mathcal{I}, X)$. Let us denote by $W^{k,p}(\mathcal{I})$, $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$ the Sobolev space over $\mathcal{I}$. Then one gets the following statement.

Proposition 2.5. If a linear set $\mathcal{D} \subset L^p(\mathcal{I}, X)$ has a dense cross-section in X and if for every $\phi \in W^{1,\infty}(\mathcal{I})$ one has : $M(\phi)\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$, then $\mathcal{D}$ is dense in $L^p(\mathcal{I}, X)$.

Proof. Let $\Gamma \in L^p(\mathcal{I}, X)^*$ be a functional on $L^p(\mathcal{I}, X)$ such that

$$\langle f, \Gamma \rangle = 0, \quad f \in \mathcal{D}.$$

Now we use the characterisation of the dual space $L^p(\mathcal{I}, X)^*$ given by Proposition 2.3. Then there is a w^*-measurable function $\Psi : \mathcal{I} \to X^*$ such that

$$0 = \langle f, \Gamma \rangle = \int_{\mathcal{I}} \langle f(t), \Psi(t) \rangle \, dt, \ \text{for } f \in \mathcal{D}.$$

By virtue of $M(\phi)\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ for $\phi \in W^{1,\infty}(\mathcal{I})$, it follows that

$$0 = \int_{\mathcal{I}} \langle \phi(t)f(t), \Psi(t) \rangle \, dt = \int_{\mathcal{I}} \phi(t) \langle f(t), \Psi(t) \rangle \, dt \ ,$$

i.e., the function $t \mapsto \langle f(t), \Psi(t) \rangle$ is in $L^1(\mathcal{I})$. Since $\phi \in W^{1,\infty}(\mathcal{I})$ is arbitrary, we conclude that

$$0 = \langle f(t), \Psi(t) \rangle, \ \text{for a.e. t} \in \mathcal{I} \ .$$

Then the condition that $\mathcal{D}$ has a dense cross-section implies $\Psi(t) = 0$ for a.e. $t \in \mathcal{I}$ and hence $\Gamma = 0$. □

Now, let $\{C(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ be a family of linear operators in the Banach space X. We note that the domains of operators $\{C(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ may depend on the parameter t. The multiplication operator $\mathcal{C}$ in $L^p(\mathcal{I}, X)$ induced by $\{C(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ is defined by

$$\begin{aligned} &(\mathcal{C}f)(t) := C(t)f(t)\ , \quad \text{with domain} \\ &\mathrm{dom}(\mathcal{C}) := \left\{ f \in L^p(\mathcal{I}, X) \ : \ \begin{array}{c} f(t) \in \mathrm{dom}(C(t)) \text{ for a.e. } t \in \mathcal{I} \\ \mathcal{I} \ni t \mapsto C(t)f(t) \in L^p(\mathcal{I}, X) \end{array} \right\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Proposition 2.6. If $\{C(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ is a family of closed linear operators in X, then the induced operator $\mathcal{C}$ is also closed.

Proof. Let the sequence $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathrm{dom}(\mathcal{C})$ be such that limits: $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ and $\lim_{n\to\infty} \mathcal{C}f_n = g$, exist in the $L^p(\mathcal{I}, X)$-topology. This implies that by a diagonal procedure one can find a subsequence $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$ such that $\lim_{n_k\to\infty} f_{n_k}(t) = f(t)$ and $\lim_{n_k\to\infty}(\mathcal{C}f_{n_k})(t) = g(t)$ for a.e. $t \in \mathcal{I}$. Since for any $t \in \mathcal{I}$ the operator $C(t)$ is closed in X, we conclude that $f(t) \in \mathrm{dom}(C(t))$ and $C(t)f(t) = g(t)$ for almost all $t \in \mathcal{I}$. On the other hand, since $g \in L^p(\mathcal{I}, X)$, it follows that $f \in \mathrm{dom}(\mathcal{C})$ and that $(\mathcal{C}f)(t) = g(t)$ almost everywhere in $\mathcal{I}$. The latter proves that operator $\mathcal{C}$ is closed. $\square$

For a family of generators, we have the following theorem.

Theorem 2.7. Let $\{C(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ be a family of generators in X such that for almost all $t \in \mathcal{I}$ it holds that $C(t) \in \mathcal{G}(M, \beta)$ for some $M \geq 1$ and $\beta \in \mathbb{R}$. If the function $\mathcal{I} \ni t \mapsto (C(t) + \xi)^{-1}x \in X$ is strongly measurable for $\xi > \beta$, $x \in X$, then the induced multiplication operator $\mathcal{C}$ is a generator in $L^p(\mathcal{I}, X)$, $p \in [1, \infty)$, and the corresponding semigroup $\{e^{-\tau\mathcal{C}}\}_{\tau\geq 0}$ is given by

$$(e^{-\tau\mathcal{C}}f)(t) = e^{-\tau C(t)}f(t) \ \text{ for a.e. } t \in \mathcal{I}.$$

In particular, on obtains that $\mathcal{C} \in \mathcal{G}(M, \beta)$.

Proof. Let $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ be a Borel set with characteristic function $\chi_{\mathcal{J}}(\cdot)$. For $\xi > \beta$ and $x \in X$ we define the mapping

$$f_{\mathcal{J},\xi} := \xi(C(\cdot) + \xi)^{-1}\chi_{\mathcal{J}}(\cdot)x : \mathcal{I} \to X.$$

Then, by definition $f_{\mathcal{J},\xi}$ is element of $L^p(\mathcal{I}, X)$, $f_{\mathcal{J},\xi}(t) \in \mathrm{dom}(C(t))$ for a.e. $t \in \mathcal{I}$ and

$$C(t)f_{\mathcal{J},\xi}(t) = \xi\, \chi_{\mathcal{J}}(t)\, x - \xi^2\, (C(t) + \xi)^{-1}\chi_{\mathcal{J}}(t)\, x$$

is also an element of $L^p(\mathcal{I}, X)$. Hence, $f_{\mathcal{J},\xi} \in \mathrm{dom}(\mathcal{C})$. Since for a.e. $t \in \mathcal{I}$ the operator $C(t)$ is a generator in X the Yosida approximation argument yields that

$$f_{\mathcal{J},\xi}(t) \to \chi_{\mathcal{J}}(t)x, \ \text{for } \xi \to \infty, \ x \in X, \ \text{a.e. } t \in \mathcal{I}.$$

Note that it is valid for any $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$. Therefore, $\mathrm{dom}(\mathcal{C})$ is dense in $L^p(\mathcal{I}, X)$.

Now, we estimate the iterated resolvents. Recall that for any $t \in \mathcal{I}$ the operators $C(t)$ belong to the same class $\mathcal{G}(M, \beta)$. Thus, for any $k \in \mathbb{N}$ we have

$$\|(C(t) + \lambda)^{-k}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \beta)^k}, \quad \lambda > \beta.$$

Hence, for almost every $t \in \mathcal{I}$ and any $f \in L^p(\mathcal{I}, X)$, we obtain

$$\|((\mathcal{C} + \lambda)^{-k} f)(t)\|_X = \|(C(t) + \lambda)^{-k}(f(t))\|_X \leq \frac{M}{(\lambda - \beta)^k}\|f(t)\|_X, \quad \lambda > \beta.$$

This implies that

$$\|(\mathcal{C} + \lambda)^{-k} f\|_{L^p} \leq \frac{M}{|\lambda - \beta|^k}\|f\|_{L^p}, \quad \lambda > \beta,$$

and therefore, by the Hille-Yosida Theorem (see e.g. [7, Theorem 2.3.8]) it follows that $\mathcal{C}$ is a generator in $L^p(\mathcal{I}, X)$. The corresponding semigroup is given by the Euler limit:

$$e^{-\tau\mathcal{C}} f = \lim_{n\to\infty} \left(I + \frac{\tau}{n}\mathcal{C}\right)^{-n} f \ , \ f \in L^p(\mathcal{I}, X) \ .$$

For any $n \geq 0$, we have

$$\left(\left(I + \frac{\tau}{n}\mathcal{C}\right)^{-n} f\right)(t) = \left(I + \frac{\tau}{n}C(t)\right)^{-n} f(t) \ .$$

This yields

$$\begin{aligned}(e^{-\tau\mathcal{C}} f)(t) &= \lim_{n\to\infty} \left(\left(I + \frac{\tau}{n}\mathcal{C}\right)^{-n} f\right)(t) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(I + \frac{\tau}{n}C(t)\right)^{-n} f(t) = e^{-\tau C(t)} f(t) \ ,\end{aligned}$$

which coincides with expression claimed in theorem. □

Remark 2.8. We note that the domain of the generator $\mathcal{C}$ does not necessarily have a dense cross-section in X since its elements might be not continuous.

An operator A in X, that does not depend on the time-parameter t, trivially induces a multiplication operator $\mathcal{A}$ in $L^p(\mathcal{I}, X)$ given by

$$(\mathcal{A}f)(t) := Af(t) \ \text{ for a.e. } t \in \mathcal{I}$$

with

$$\operatorname{dom}(\mathcal{A}) := \left\{ f \in L^p(\mathcal{I}, X) : \begin{array}{c} f(t) \in \operatorname{dom}(A) \text{ for a.e. } t \in \mathcal{I} \\ \mathcal{I} \ni t \mapsto Af(t) \in L^p(\mathcal{I}, X) \end{array} \right\}.$$

Then Theorem 2.7 immediately yields the following corollary:

Corollary 2.9. Let A be a generator in X. Then the induced multiplication operator $\mathcal{A}$ is a generator in $L^p(\mathcal{I}, X)$ and its semigroup is given by

$$(e^{-\tau\mathcal{A}}f)(t) = e^{-\tau A}f(t), \quad \text{a.e. } t \in \mathcal{I}.$$

The next lemma describes how domains of two induced multiplication operators in $L^p(\mathcal{I}, X)$ can be described by domains of the corresponding operators in the space X.

Lemma 2.10. Let the assumptions (A1) and (A2) be satisfied. If

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathcal{I}} \|B(t)x\|_X \leq C_0\|Ax\|_X < \infty \quad \text{for} \quad x \in \mathrm{dom}(A) \ , \tag{2.2}$$

is valid, then $\mathrm{dom}(\mathcal{A}) \subset \mathrm{dom}(\mathcal{B})$.

Proof. Let $f \in \mathrm{dom}(\mathcal{A})$. Then, by definition of $\mathrm{dom}(\mathcal{A})$ one gets $f(t) \in \mathrm{dom}(A)$ for a.e. $t \in \mathcal{I}$ and hence $f(t) \in \mathrm{dom}(B(t))$ for a.e. $t \in \mathcal{I}$. Consequently, by virtue of (2.2) we obtain

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathcal{I}} \|B(t)A^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq C_0 \ .$$

Hence, one gets

$$\|B(t)f(t)\|_X = \|B(t)A^{-1}Af(t)\|_X \leq C_0\|Af(t)\|_X \ ,$$

which yields that the function $t \mapsto B(t)f(t)$ is in $L^p(\mathcal{I}, X)$. Thus, $f \in \mathrm{dom}(\mathcal{B})$, i.e. $\mathrm{dom}(\mathcal{A}) \subset \mathrm{dom}(\mathcal{B})$. □

Note that a family $\{F(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ of bounded operators is measurable if the map $\mathcal{I} \ni t \mapsto F(t)x \in X$ is measurable for each $x \in X$. The following proposition is very useful for our purposes.

Proposition 2.11 ([8]). Let $\{F(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ be a measurable family of bounded linear operators on X. Then, for the induced multiplication operator $\mathcal{F}$ on $L^p(\mathcal{I}, X)$ its norm can be expressed as

$$\|\mathcal{F}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathcal{I}} \|F(t)\|_{\mathscr{L}(X)} \ .$$

3. Non-autonomous Cauchy problems and the evolution semigroups approach to solve them

Let us consider the nACP (1.1) in the separable Banach space X. We are going to explain an approach of solving it by using the *evolution semigroups*.

3.1. Evolution semigroup approach

Crucial for this approach is the notion of the *evolution pre-generator*.

Definition 3.1. An operator $\mathcal{K}$ in $L^p(\mathcal{I}, X)$, $p \in [1, \infty)$, is called a evolution pre-generator if

(i) $\mathrm{dom}(\mathcal{K}) \subset C(\mathcal{I}, X)$ and $M(\phi)\mathrm{dom}(\mathcal{K}) \subset \mathrm{dom}(\mathcal{K})$ for $\phi \in W^{1,\infty}(\mathcal{I})$,

(ii) $\mathcal{K}M(\phi)f - M(\phi)\mathcal{K}f = M(\dot{\phi})f, \quad f \in \mathrm{dom}(\mathcal{K}), \quad \phi \in W^{1,\infty}(\mathcal{I})$, where $\dot{\phi} = \partial_t\phi$,

(iii) the domain $\mathrm{dom}(\mathcal{K})$ has a dense cross-section in X (see Definition 2.4).

If, in addition, the operator $\mathcal{K}$ is a generator of a semigroup in $L^p(\mathcal{I}, X)$, then $\mathcal{K}$ is called an *evolution generator*.

Remark 3.2. The domain $\mathrm{dom}(\mathcal{K})$ of an evolution pre-generator is dense in the Banach space $L^p(\mathcal{I}, X)$. Indeed, the dense cross-section property (iii) together with (i) and Lemma 2.5 imply the density of $\mathrm{dom}(\mathcal{K}) \subset L^p(\mathcal{I}, X)$.

Now, we can present the main idea concerning the solving of the problem (1.1). The next theorem explains why we are interested in such a notion as *evolution semigroups.*

Theorem 3.3 ([16, Theorem 4.12]). Between the set of all semigroups $\{e^{-\tau\mathcal{K}}\}_{\tau\geq 0}$ on the Banach space $L^p(\mathcal{I}, X)\}$, $p \in [1, \infty)$, generated by an evolution generator $\mathcal{K}$ and the set of all solution operators (propagators) $\{U(t, s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ on the Banach space X exists a one-to-one correspondence such that the relation

$$(e^{-\tau\mathcal{K}}f)(t) = U(t, t-\tau)\chi_{\mathcal{I}}(t-\tau)f(t-\tau), \tag{3.1}$$

holds for $f \in L^p(\mathcal{I}, X)$ and for a.e. $t \in \mathcal{I}$, where $\chi_{\mathcal{I}}(\cdot)$ is the characteristic function of the interval $\mathcal{I}$.

In other words, there is a *one-to-one* correspondence between evolution semigroups and the propagators that solve the nACP problem (1.1)

One of the important example of evolution generator is $D_0 := \partial_t$ defined in the space $L^p(\mathcal{I}, X)$ by

$$D_0 f(t) := \partial_t f(t),\ \mathrm{dom}(D_0) := \{f \in W^{1,p}([0, T], X) : f(0) = 0\}\ .$$

Then, the operator D_0 is a generator of class $\mathcal{G}(1, 0)$ of the *right-shift* evolution semigroup $\{S(\tau)\}_{\tau\geq 0}$ that has the form

$$(e^{-\tau D_0}f)(t) = (S(\tau)f)(t) := f(t-\tau)\chi_{\mathcal{I}}(t-\tau), \quad f \in L^p(\mathcal{I}, X), \quad \text{a.e. } t \in \mathcal{I}.$$

The propagator corresponding to the right-shift evolution semigroup is the identity propagator, i.e. $U(t, s) = I$ for $(t, s) \in \Delta \in \mathcal{I}_0 \times \mathcal{I}_0$, where $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I} \setminus \{0\}$.

We note that the generator D_0 has empty spectrum since the semigroup $\{S(\tau)\}_{\tau\geq 0}$ is *nilpotent* and therefore the integral $\int_0^\infty d\tau\, e^{-\tau\lambda}S(\tau)f$ exists for any $\lambda \in \mathbb{C}$ and for any $f \in L^p(\mathcal{I}, X)$.

For a given operator family $\{C(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ in X the induced multiplication operator $\mathcal{C}$ in $L^p(\mathcal{I}, X)$ is defined by (2.1). We consider in $L^p(\mathcal{I}, X)$ the operator

$$\widetilde{\mathcal{K}} := D_0 + \mathcal{C}\ , \quad \mathrm{dom}(\widetilde{\mathcal{K}}) := \mathrm{dom}(D_0) \cap \mathrm{dom}(\mathcal{C})\ . \tag{3.2}$$

Lemma 3.4. If $\mathrm{dom}(\widetilde{\mathcal{K}})$ has a dense cross-section, then the operator $\widetilde{\mathcal{K}}$ is a evolution pre-generator.

Proof. By (3.2) we get $\mathrm{dom}(\widetilde{\mathcal{K}}) \subset \mathrm{dom}(D_0) \subset C(\mathcal{I}, X)$. Since $\mathcal{C}$ is an induced multiplication operator, then by definition (2.1) it commutes with the operator $M(\phi)$ for $\phi \in W^{1,\infty}(\mathcal{I})$. So, with $\mathrm{dom}(\widetilde{\mathcal{K}}) = \mathrm{dom}(D_0) \cap \mathrm{dom}(\mathcal{C})$ we get $M(\phi)\mathrm{dom}(\widetilde{\mathcal{K}}) \subset \mathrm{dom}(\widetilde{\mathcal{K}})$. Then the relation $\widetilde{\mathcal{K}}M(\phi)f - M(\phi)\widetilde{\mathcal{K}}f = M(\dot{\phi})f$ for $f \in \mathrm{dom}(\widetilde{\mathcal{K}})$ (see Definition 3.1, (ii)) follows by the Leibniz rule for $(D_0 M(\phi)f)(t) = \partial_t(\phi f)(t)$. □

Now, we precise the notion of the *solution operator* of the problem (1.1) versus the *propagator* $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ on the Banach space X. In the beginning we described it in Introduction §1.

Definition 3.5.

(i) The evolution nACP (1.1) is called *correctly posed* in $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I} \setminus \{0\}$ if $\widetilde{\mathcal{K}}$ defined by (3.2) is an evolution pre-generator.

(ii) A propagator $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ is called a *solution operator* of the correctly posed evolution problem (1.1) if the corresponding evolution generator $\mathcal{K}$ (Theorem 3.3) is an operator extension of $\widetilde{\mathcal{K}}$, i.e. $\widetilde{\mathcal{K}} \subseteq \mathcal{K}$.

(iii) The evolution problem (1.1) has a unique solution operator if $\widetilde{\mathcal{K}}$ admits only one extension that is an evolution generator.

Remark 3.6.

(i) It is an open problem whether an evolution pre-generator admits several extension which are evolution generators. However, if this is case then the nACP (1.1) has more than one solution operator.

(ii) Our Definition 3.5 (ii) of a correctly posed nACP is a *weak* property. For example, the notion of well-posedness developed in [20] implies this property.

To find extensions of the evolution pre-generator $\widetilde{\mathcal{K}}$ which are evolution generators is, in general, a nontrivial problem. However, there is a special case, that easily guarantees the existence of such extension and, moreover, it is unique.

Theorem 3.7. Assume that the nACP (1.1) is correctly posed in $\mathcal{I}_0$. If the evolution pre-generator $\widetilde{\mathcal{K}}$ is closable in $L^p(\mathcal{I}, X)$ and its closure $\mathcal{K}$ is a generator, then the evolution problem (1.1) has a unique solution operator.

Proof. Assume that $\mathcal{K}$ belongs to the class $\mathcal{G}(M,\beta)$. Then by Lemma 2.16 of [16] the estimate

$$\|f(t)\|_X \leq \frac{M}{(\xi-\beta)^{(p-1)/p}} \|(\mathcal{K}+\xi)f\|_{L^p} \ , \quad f \in \mathrm{dom}(\mathcal{K})\,,$$

holds a.e. in $\mathcal{I}$ for all $\xi > \beta$. In particular, one gets for any $f \in \mathrm{dom}(\widetilde{\mathcal{K}})$:

$$\|f\|_C \leq \frac{M}{(\xi-\beta)^{(p-1)/p}} \|(\widetilde{\mathcal{K}}+\xi)f\|_{L^p} \,.$$

Hence, we conclude for the closure $\mathcal{K}$ of $\widetilde{\mathcal{K}}$ one has $\mathrm{dom}(\mathcal{K}) \subset C(\mathcal{I}, X)$.

Now, we show that $\mathcal{K}$ is an evolution generator. Let $f \in \mathrm{dom}(\mathcal{K})$. Then, by the closeness of $\mathcal{K}$, there is a sequence $f_n \in \mathrm{dom}(\widetilde{\mathcal{K}})$ such that $f_n \to f$ and $\widetilde{K} f_n \to \mathcal{K} f$, both in $L^p(\mathcal{I}, X)$. Let $\phi \in W^{1,\infty}(\mathcal{I})$. Since $\widetilde{\mathcal{K}}$ is an evolution pre-generator, Definition 3.1, (ii) yields

$$\widetilde{\mathcal{K}} M(\phi) f_n = M(\phi) \widetilde{\mathcal{K}} f_n + M(\dot{\phi}) f_n .$$

Note that the right-hand side converges to $M(\phi)\mathcal{K} f + M(\dot{\phi}) f$. Therefore, we conclude that $M(\phi) f \in \mathrm{dom}(\mathcal{K})$ and $\mathcal{K} M(\phi) f = M(\phi)\mathcal{K} f + M(\dot{\phi}) f$. Hence, $\mathcal{K}$ is an evolution generator.

Now let $\mathcal{K}$ and $\mathcal{K}'$ be two different extensions of $\widetilde{\mathcal{K}}$ that are both evolution generators. Since $\mathcal{K}$ is the closure of $\widetilde{\mathcal{K}}$ and $\mathcal{K}'$ is closed, we get $\mathrm{dom}(\mathcal{K}) \subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{K}')$ and the restriction: $K' \mathrm{dom}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$. Recall that $e^{-s\mathcal{K}}(\mathrm{dom}(\mathcal{K})) \subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{K})$, for $s \geq 0$. Then for all $f \in \mathrm{dom}(\mathcal{K})$ and $0 < s < \tau$ we obtain

$$\frac{d}{ds}\{e^{-(\tau-s)\mathcal{K}'} e^{-sK} f\} = e^{-(\tau-s)\mathcal{K}'}(\mathcal{K}' - \mathcal{K}) e^{-s\mathcal{K}} f = 0 \ .$$

Hence, the function $s \mapsto e^{-(\tau-s)\mathcal{K}'} e^{-s\mathcal{K}} u$ is a constant for each $u \in \mathrm{dom}(\mathcal{K})$. Thus, the semigroup generated by $\mathcal{K}'$ must be the same as the one by $\mathcal{K}$, which implies $\mathcal{K} = \mathcal{K}'$. □

These considerations suggest the following strategy for solving the nACP:
To find the unique solution operator of the problem (1.1) it is sufficient to prove that the evolution pre-generator $\widetilde{\mathcal{K}}$, defined by (3.2), is *essentially* generator, i.e., the closure of $\widetilde{\mathcal{K}}$ is a generator.

3.2. A special class of evolution equations

We are interested in the nACP of a special form. Setting $C(t) := A + B(t)$, $t \in \mathcal{I}$, $\mathrm{dom}(C(t)) = \mathrm{dom}(A) \cap \mathrm{dom}(B(t))$ we see that this problem fits into (1.1).

The operator A in X trivially induces a multiplication operator $\mathcal{A}$ in the Banach space $L^p(\mathcal{I}, X)$. The operator family $\{B(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ induces a multiplication operator $\mathcal{B}$. Our aim is, to show that the closure of the evolution pre-generator

$$\widetilde{\mathcal{K}} := D_0 + \mathcal{A} + \mathcal{B}, \quad \mathrm{dom}(\widetilde{\mathcal{K}}) := \mathrm{dom}(D_0) \cap \mathrm{dom}(\mathcal{A}) \cap \mathrm{dom}(\mathcal{B})$$

becomes an evolution generator under appropriate assumptions on the operator A and the operator family $\{B(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$.

Firstly, we consider the operator sum $D_0 + \mathcal{A}$. Let A be a generator in X with the semigroup $\{e^{-\tau A}\}_{\tau\geq 0}$. Then $\mathcal{A}$ is a generator in $L^p(\mathcal{I}, X)$ with semigroup $\{e^{-\tau\mathcal{A}}\}_{\tau\geq 0}$ given by $(e^{-\tau\mathcal{A}} f)(t) = e^{-\tau A} f(t)$ for a.e. $t \in \mathcal{I}$ (cf. Lemma 2.9). Since A is time-independent, the operators $\mathcal{A}$ and D_0 commute. Hence, the product

$$e^{-\tau D_0} e^{-\tau\mathcal{A}} f = \chi_{\mathcal{I}}(\cdot - \tau) e^{-\tau\mathcal{A}} f(\cdot - \tau)$$

defines a semigroup on $L^p(\mathcal{I}, X)$. The generator of this semigroup is denoted by $\mathcal{K}_0$ and satisfies the following properties:

Lemma 3.8. Let A be a generator in X inducing the multiplication operator $\mathcal{A}$ in $L^p(\mathcal{I}, X)$. Let D_0 be the generator of the right-shift semigroup on $L^p(\mathcal{I}, X)$. Then, the following holds:

(i) The set $\mathcal{D} := \mathrm{dom}(D_0) \cap \mathrm{dom}(\mathcal{A})$ is dense in $L^p(\mathcal{I}, X)$ and it has a dense cross-section in X. In particular, $\mathrm{dom}(\mathcal{K}_0)$ has a dense cross-section in X.

(ii) The restriction $\mathcal{K}_0\mathcal{D} =: \widetilde{\mathcal{K}}_0 = D_0 + \mathcal{A}$ and the closure $\overline{(\widetilde{\mathcal{K}}_0)} = \mathcal{K}_0$.

(iii) $\|e^{-\tau\mathcal{K}_0}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathcal{I},X))} = \|e^{-\tau\mathcal{A}}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathcal{I},X))}$ for $\tau \in \mathcal{I}$. In particular, the generators A, $\mathcal{A}$ and $\mathcal{K}_0$ belong to the same class $\mathcal{G}(M, \beta)$.

Proof. (i) Note that for any $\phi \in W^{1,\infty}(\mathcal{I})$ we have $M(\phi)\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$. Now we prove that $\mathcal{D}$ has a dense cross-section in X. To this aim, let $t_0 \in \mathcal{I} \setminus \{0\}$ and $x_0 \in X$ be fixed. Since A is a generator in X, by the Yosida approximation it follows that

$$\mathrm{dom}(A) \ni x_\xi := \xi(A + \xi)^{-1}x_0 \to x_0, \quad \text{as } \xi \to \infty.$$

Therefore, for any $\epsilon > 0$ there exists $\xi > 0$ such that $\|x_\xi - x_0\|_X < \epsilon$. Let $\psi \in C^\infty(\mathcal{I})$ be such that $\psi(0) = 0$ and $\psi(t_0) = 1$. Then, g defined by $g(t) = \psi(t)x_\xi$ is in $\mathcal{D}$ and $\|g(t_0) - x_0\|_X < \epsilon$.

Assertion (ii) holds by definition and assertion (iii) follows immediately from the fact that $\mathrm{dom}(D_0) \cap \mathrm{dom}(\mathcal{A})$ is dense in $L^p(\mathcal{I}, X)$ and that the operator D_0 belongs to the class $\mathcal{G}(1, 0)$. □

Remark 3.9. In general, the operator $\widetilde{\mathcal{K}}_0 = D_0 + \mathcal{A}$ must *not* be a closed operator and the domain of $\widetilde{\mathcal{K}}_0$ may be *larger* than $\mathrm{dom}(D_0) \cap \mathrm{dom}(\mathcal{A})$. Let

$$\partial_t u(t) = -Au(t), \quad u(0) = u_0 \ ,$$

be the evolution problem associated to the densely defined and closed operator A. Let us recall that if A satisfies the condition of *maximal parabolic regularity*, see e.g. [1, 23, 24, 2], then A has to be the generator of a *holomorphic* semigroup and the operator $\widetilde{\mathcal{K}}_0$ is closed. Hence, $\widetilde{\mathcal{K}}_0 = \mathcal{K}_0$. However, if A is the generator of a holomorphic semigroup, then in general it does not follow that A satisfies the condition of maximal parabolic regularity. This is only true for Hilbert spaces.

4. Existence and uniqueness of the solution operator of the evolution equation

In this section we want to find the solution operator for the nACP (1.3) in the sense of Definition 3.5. In particular, we show that the closure $\overline{\widetilde{\mathcal{K}}}$ of the operator $\widetilde{\mathcal{K}} = D_0 + \mathcal{A} + \mathcal{B}$ is a generator (cf. Theorem 3.7). In fact, we are going to prove that $\mathcal{K} := \mathcal{K}_0 + \mathcal{B}$ is an evolution generator.

Note that since we deal with many generators, there is a need to investigate the sum of them. To this aim we recall two results from the perturbation theory for semigroup generators.

Proposition 4.1 ([15, Corollary IX.2.5]). Let A be the generator of a holomorphic semigroups and let B be A-bounded with relative bound zero. Then $A + B$ is also the generator of a holomorphic semigroup.

The next result is due to J. Voigt [28]. It allows to treat perturbations with non-zero relative bounds.

Proposition 4.2 ([28, Theorem 1]). Let $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ be a semigroup acting on the Banach space X with generator $A \in \mathcal{G}(M_A, \gamma_A)$. Let B be a densely defined linear operator in X and assume there is a dense subspace $\mathcal{D} \subset X$ such that:

(i) $\mathcal{D} \subset \operatorname{dom}(A) \cap \operatorname{dom}(B)$, $T(t)\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ for $t \geq 0$ and for all $x \in \mathcal{D}$ the function $t \mapsto BT(t)x$ is continuous,

(ii) There are constants $\beta_1 \in (0, \infty]$ and $\beta_2 \in [0, 1)$ such that for all $x \in \mathcal{D}$ it holds that

$$\int_0^{\beta_1} dt\, e^{-\gamma_A t} \|BT(t)x\| \leq \beta_2 \|x\| \ .$$

Then there exists a unique semigroup $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ and its generator C is the closure of the restriction $(A + B)\mathcal{D}$, with domain $\operatorname{dom}(C) = \operatorname{dom}(A)$. Moreover, the operator $B\mathcal{D}$ is $A\mathcal{D}$-bounded and can be extended uniquely to an A-bounded operator $\widehat{B}$ with domain $\operatorname{dom}(\widehat{B}) = \operatorname{dom}(A)$. For this extension one gets that $C = A + \widehat{B}$. In particular, if B is closed, then B is A-bounded and $C = A + B$. Moreover, the following estimate holds

$$\|S(t)\| \leq \left(\frac{M_A}{1 - \beta_2}\right)^{1+t/\beta_1} e^{\gamma_A t}, \quad t \geq 0 \ .$$

Lemma 4.3. Assume (A1), (A2) and (A3) for the operators A and the operator family $\{B(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$. Then, we get $\|\mathcal{B}\mathcal{A}^{-\alpha}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \leq C_\alpha$.

Proof. The claim follows directly using Lemma 2.6 and Lemma 2.10. □

Proposition 4.4. Let the assumptions (A1), (A2) and (A3) be satisfied. Then $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 + \mathcal{B}$ is a generator in $L^p(\mathcal{I}, X)$, $p \in [1, \infty)$, with domain $\operatorname{dom}(\mathcal{K}) = \operatorname{dom}(\mathcal{K}_0)$.

Proof. We want to apply Proposition 4.2. Let $\mathcal{D} = \operatorname{dom}(D_0) \cap \operatorname{dom}(\mathcal{A}) \cap \operatorname{dom}(\mathcal{B})$. Since $\operatorname{dom}(\mathcal{A}) \subset \operatorname{dom}(\mathcal{B})$, we have $\mathcal{D} = \operatorname{dom}(D_0) \cap \operatorname{dom}(\mathcal{A})$. Using Lemma 3.8, we conclude that $\mathcal{D}$ is a dense subspace of $L^p(\mathcal{I} = [0, T], X)$, which is invariant under the semigroup $\{e^{-\tau\mathcal{K}_0}\}_{\tau\geq 0}$.

From Proposition 2.2 we get that for a fixed $\alpha \in (0, 1)$ and for any $\tau \in (0, T] = \mathcal{I}_0$ there exists a constant M_α^A (which depends only on α) such that $\|A^\alpha e^{-\tau A}\| \leq M_\alpha^A / \tau^\alpha$.

We prove conditions (i) and (ii) of Proposition 4.2. Let $f \in \mathcal{D} = \mathrm{dom}(D_0) \cap \mathrm{dom}(\mathcal{A}) \subset C_0(\mathcal{I}, X)$. Then for $\alpha \in (0,1)$ and $\tau > 0$ we conclude that

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{B}e^{-\tau\mathcal{K}_0} f\|^p_{L^p} &= \int_{\mathcal{I}} dt \|B(t)e^{-\tau D_0}e^{-\tau A} f(t)\|^p_X \\
&\leq \int_{\mathcal{I}} dt \|B(t)A^{-\alpha}A^{\alpha}e^{-\tau A}\|^p_{\mathcal{L}(X)} \cdot \|f\|^p_{L^p} \leq \\
&\leq \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathcal{I}} \|B(t)A^{-\alpha}\|^p_{\mathcal{L}(X)} \cdot \frac{(M^A_\alpha)^p}{\tau^{\alpha p}} T \cdot \|f\|^p_{L^p} \leq C^p_\alpha \frac{(M^A_\alpha)^p T}{\tau^{\alpha p}} \|f\|^p_{L^p}.
\end{aligned}$$

Then, we get $\|\mathcal{B}e^{-\tau\mathcal{K}_0} f\|_{L^p} \leq C_\alpha M^A_\alpha T^{1/p} \tau^{-\alpha} \|f\|_{L^p}$. Moreover, for $f \in \mathcal{D}$ we have

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{B}(e^{-\tau\mathcal{K}_0} - I)f\|_{L^p} &= \| \int_0^\tau \mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\mathcal{K}_0 f\|_{L^p} d\sigma = \\
&= \| \int_0^\tau \mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{A}}e^{-\sigma D_0}\mathcal{K}_0 f\|_{L^p} d\sigma \leq \\
&\leq \|\mathcal{B}\mathcal{A}^{-\alpha}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \int_0^\tau \|\mathcal{A}^\alpha e^{-\sigma\mathcal{A}}\|_{\mathcal{L}(L^p(\mathcal{I},X))} d\sigma \|\mathcal{K}_0 f\|_{L^p(\mathcal{I},X)} \leq \\
&\leq C_\alpha M^A_\alpha \int_0^\tau \frac{1}{\sigma^\alpha} d\sigma \|\mathcal{K}_0 f\|_{L^p(\mathcal{I},X)} = \frac{C_\alpha M^A_\alpha}{1-\alpha} \tau^{1-\alpha} \|\mathcal{K}_0 f\|_{L^p(\mathcal{I},X)},
\end{aligned}$$

that yields continuity in $\tau = 0$ and hence, the function $\mathcal{I} \ni \tau \mapsto \mathcal{B}e^{-\tau\mathcal{K}_0} f \in L^p(\mathcal{I}, X)$ is continuous. Moreover, we get

$$\int_0^a \|\mathcal{B}e^{-\tau\mathcal{K}_0} f\|_{L^p(\mathcal{I},X)} d\tau \leq C_\alpha M^A_\alpha \|f\|_{L^p} \int_0^a \frac{1}{\tau^\alpha} d\tau = \frac{C_\alpha M^A_\alpha}{(1-\alpha)} a^{1-\alpha} \|f\|_{L^p(\mathcal{I},X)}.$$

Now, take $a < \left((1-\alpha)/C_\alpha M^A_\alpha\right)^{1/(1-\alpha)}$. Hence, all conditions of Proposition 4.2 are satisfied. So we conclude that the operator $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 + \mathcal{B}$ with domain $\mathrm{dom}(\mathcal{K}) = \mathrm{dom}(\mathcal{K}_0)$ is a generator. □

Now we can state the main theorem concerning the nACP (1.3).

Theorem 4.5. Let the assumptions (A1), (A2) and (A3) of Assumption 1.1 be satisfied. Then the evolution problem (1.3) has a unique solution operator in the sense of Definition 3.5.

Proof. The evolution problem is correctly posed since the set $\mathrm{dom}(D_0) \cap \mathrm{dom}(\mathcal{A})$ has a dense cross-section in X (cf. Lemma 3.8). Using Theorem 3.7 and Proposition 4.2 the assertion follows. □

Remark 4.6.

1. The existence result does *not* require that the operators $B(t)$ are generators.

2. The assumption $0 \in \varrho(A)$ is just for simplicity. Otherwise, the generator A can be shifted by a constant $\eta > 0$. Proposition 2.1 ensures that the domain of the fractional power of A does not change either.

3. The assumptions (A1), (A2), (A3) imply that for a.e. $t \in \mathcal{I}$ the operator $B(t)$ is infinitesimally small with respect to A. Indeed, fix $t \in \mathcal{I}$, we conclude

$$\operatorname{dom}(A+\eta) = \operatorname{dom}(A) \subset \operatorname{dom}(A^\alpha) \subset \operatorname{dom}(B(t))$$

for $\eta > 0$ and so by Proposition 2.1 we have

$$\|B(t)(A+\eta)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le \|B(t)A^{-\alpha}\|_{\mathcal{L}(X)} \cdot \|A^\alpha (A+\eta)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{C_\alpha C_0}{\eta^{1-\alpha}}.$$

And therefore for any $x \in \operatorname{dom}(A) \subset \operatorname{dom}(B(t))$, we get

$$\|B(t)x\|_X \le \frac{C_\alpha C_0}{\eta^{1-\alpha}} \cdot \|(A+\eta)x\|_X \le C_\alpha C_0 \eta^\alpha \left(\frac{1}{\eta}\|Ax\|_X + \|x\|_X\right).$$

Since the relative bound can be chosen arbitrarily small by the large shift $\eta > 0$, the perturbation Proposition 4.1 yields that $A + B(t)$ is the generator of a holomorphic semigroup. Hence, the problem (1.3) is a parabolic evolution equation.

5. Stability condition

As we have already mentioned, the existence result holds even if the operators $B(t)$ are not generators. In the following, we are going to approximate the solution using a Trotter product formula. To this end, we have to take into account the condition (A4) from Assumption 1.1.

Remark 5.1.

(i) In (A2) we assumed that the function $t \mapsto B(t)x$ for $x \in \operatorname{dom}(A) \subset \operatorname{dom}(B(t))$ is strongly measurable. The assumption (A4) implies this property, which can be easily obtained using the Yosida approximation. Using (A3), (A4) and $\operatorname{dom}(A) \subset \operatorname{dom}(A^\alpha) \subset \operatorname{dom}(B(t))$, assumption (A2) is not needed anymore.

(ii) Using Theorem 2.7, assumption (A4) implies that the induced operator $\mathcal{B}$ is a generator in $L^p(\mathcal{I}, X)$.

Now, let us consider the operator sums $A + B(t)$ and $\mathcal{A} + \mathcal{B}$.

Lemma 5.2. Let the operators A and $\{B(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ satisfy assumptions (A1), (A3) and (A4) and let $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ be the corresponding induced multiplication operators in $L^p(\mathcal{I}, X)$. Then, $C(t) := A + B(t)$ is the generator of a holomorphic semigroup on X and it induces the multiplication operator $\mathcal{C}$ given by $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$, which is in turn a generator of a holomorphic semigroup on $L^p(\mathcal{I}, X)$.

Proof. Using Lemma 4.3 and Theorem 4.1, we obtain that $C(t)$ and $\mathcal{C}$ generate holomorphic semigroups. □

A fundamental tool for approximation the solution operator (propagator) $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ of the evolution equation (1.3) is the *Trotter product formula.* The first step is to establish a general sufficient condition for existence of this formula in the case of evolution semigroups §3.1.

Proposition 5.3 ([7, Theorem III.5.8]). Let A and B be two generators in X. If there are constants $M > 0$ and $\omega \in \mathbb{R}$ such that the condition

$$\|(e^{-\tau/nA}e^{-\tau/nB})^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega\tau} \ , \tag{5.1}$$

is satisfied for all $\tau \geq 0$ and $n \in \mathbb{N}$ and if the closure of the sum: $C = \overline{A+B}$, is in turn a generator, then the corresponding semigroup is given by the Trotter product formula

$$e^{-\tau C}x = \lim_{n\to\infty}(e^{-\tau/nA}e^{-\tau/nB})^n\, x, \quad x \in X \ , \tag{5.2}$$

with uniform convergence in τ for compact intervals.

Remark 5.4. The condition (5.1) is called the Trotter *stability condition* for the pair of operators $\{A, B\}$. It turns out that if the Trotter stability condition is satisfied for the pair $\{A, B\}$, then the Trotter stability condition holds also for the pair $\{B, A\}$, i.e. there are constants $M' > 0$, and $\omega' \in \mathbb{R}$ such that

$$\|(e^{-\tau/nB}e^{-\tau/nA})^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M'e^{\omega'\tau}$$

for all $\tau \geq 0$ and $n \in \mathbb{N}$. In particular, the operators A and B can be interchanged in formula (5.2) without modification of the left-hand side.

In the following, we consider two different splittings of the evolution semigroup generator $\mathcal{K}$, see §3.2:

$$\mathcal{K} = \overline{D_0 + (\mathcal{A}+\mathcal{B})} = \overline{D_0 + \mathcal{C}}, \quad \text{and} \quad \mathcal{K} = \mathcal{K}_0 + \mathcal{B} \ .$$

For them we want to apply the Trotter product formula (5.2). Note that the Trotter stability condition (5.1) can be expressed in terms of operators A and $B(t)$.

Definition 5.5. Let X be a separable Banach space.

1. Let $\{C(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ be family of generators in X. The family $\{C(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ is called stable if there is a constant $M > 0$ such that

$$\operatorname*{ess\,sup}_{(t,s)\in\Delta}\left\|\prod_{j=1}^{n\leftarrow} e^{-\frac{(t-s)}{n}C(s+\frac{j}{n}(t-s))}\right\|_{\mathscr{L}(X)} \leq M \tag{5.3}$$

holds for any $n \in \mathbb{N}$.

2. Let A be a generator and let $\{B(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ be a family of generators in X. The family $\{B(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ is called stable with respect to A if there is a constant $M > 0$ such that

$$\operatorname*{ess\,sup}_{(t,s)\in\Delta} \left\| \prod_{j=1}^{n\leftarrow} G_j(t,s;n) \right\|_{\mathscr{L}(X)} \leq M \tag{5.4}$$

holds for any $n \in \mathbb{N}$ where $G_j(t,s;n)$ is defined by (1.6).

In both cases these products are ordered for index j increasing from the right to the left. We recall that $\Delta = \{(t,s) \in \mathcal{I}_0 \times \mathcal{I}_0 : 0 < s \leq t \leq T\}$.

Remark 5.6. There are different types of stability conditions known for the evolution equations. This is, in particular, a condition of the *Kato stability*, which is equivalent to the *renormalizability* condition for the underlying Banach space, see [19, Definition 4.1]. We note that below condition of the Trotter stability involves only the products (5.3), (5.4), of valued for equidistant-time steps $(t-s)/n$. Therefore, it is *weaker* than the Kato stability condition.

We warm the reader that we follow a convention (§2) that it is the operator A, which is called the *generator* of a strongly continuous semigroup $\{e^{-tA}\}_{t\geq 0}$, see e.g. [25, Section X.8]. Although in other sources this name is attributed to the operator $-A$, see [15, Chapter IX,§1.3].

Proposition 5.7. Let A be a generator and let $\{B(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ be a family of generators in the separable Banach space X. Let $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ be the multiplication operators in $L^p(\mathcal{I}, X)$ induced by A and by $\{B(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$, respectively. Let $\mathcal{K}_0 := \overline{D_0 + \mathcal{A}}$.

(i) If the operator family $\{C(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ is stable (5.3), then the pair $\{D_0, \mathcal{C}\}$ is Trotter-stable (5.1).

(ii) If the family $\{B(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ is stable with respect to A (5.4), then the pair $\{\mathcal{B}, \mathcal{K}_0\}$ is Trotter-stable (5.1).

Proof. (i) The right-shift semigroup $\{S(\tau)\}_{\tau\geq 0}$ (§3.1) is nilpotent, and hence, the product is zero for $\tau \geq T$. We have

$$((e^{-\frac{\tau}{n}\mathcal{C}} e^{-\frac{\tau}{n}D_0})^n f)(t) = \prod_{j=0}^{\rightarrow n-1} e^{-\frac{\tau}{n}C(t-j\frac{\tau}{n})} \chi_{\mathcal{I}}(t-\tau) f(t-\tau), \quad t \in \mathbb{R},$$

$f \in L^p(\mathcal{I}, X)$, $p \in [0,\infty)$, where the product is increasingly ordered in j from the left to the right. Let us introduce the left-shift semigroup $L(\tau)$, $\tau \geq 0$,

$$(L(\tau)f)(t) := \chi_{\mathcal{I}}(t+\tau) f(t+\tau), \quad t \in \mathcal{I}, \quad f \in L^p(\mathcal{I}, X), \quad p \in [1,\infty). \tag{5.5}$$

Using this semigroup we find that

$$\left(L(\tau)\left(e^{-\frac{\tau}{n}\mathcal{C}} e^{-\frac{\tau}{n}D_0}\right)^n f\right)(t) = \left(\prod_{j=1}^{n\leftarrow} e^{-\frac{\tau}{n}C(t+j\frac{\tau}{n})}\right) \chi_{\mathcal{I}}(t+\tau) f(t), \quad t \in \mathcal{I},$$

for $f \in L^p(\mathcal{I}, X)$, $p \in [1, \infty)$. Therefore, the operator in the left-hand side is a multiplication operator induced by

$$\left\{ \prod_{j=1}^{n\leftarrow} e^{-\frac{\tau}{n} C(t + j\frac{\tau}{n})} \chi_{\mathcal{I}}(t+\tau) \right\}_{t \in \mathcal{I}} .$$

Using Proposition 2.11 and assuming that $\{C(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ is Trotter-stable (5.3), we obtain the estimate

$$\|L(\tau) \left(e^{-\frac{\tau}{n}\mathcal{C}} e^{-\frac{\tau}{n}D_0}\right)^n \|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} = \operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T-\tau} \left\| \prod_{j=1}^{n\leftarrow} e^{-\frac{\tau}{n} C(t + j\frac{\tau}{n})} \right\|_{\mathscr{L}(X)} \le M.$$

Since for $\tau \in [0, T)$ one has

$$\| \left(e^{-\frac{\tau}{n}\mathcal{C}} e^{-\frac{\tau}{n}D_0}\right)^n \|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} = \|L(\tau) \left(e^{-\frac{\tau}{n}\mathcal{C}} e^{-\frac{\tau}{n}D_0}\right)^n \|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} , \tag{5.6}$$

this estimate proves the claim (i). In a similar manner one proves the claim (ii). □

Now, let us introduce the operator family:

$$T(\tau) = e^{-\tau\mathcal{B}} e^{-\tau\mathcal{K}_0}, \quad \tau \ge 0.$$

Note that if the family $\{B(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ is stable with respect to A (5.4), then

$$\|T(\tau/n)^n\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \le M, \quad \text{for } \ n \in \mathbb{N} \ \text{ and } \ \tau \ge 0. \tag{5.7}$$

Lemma 5.8. If the operator family $\{B(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ is stable with respect to A, then

$$\|T(\tau/n)^m\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \le M$$

for any $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ and $\tau \ge 0$. In particular, we have

$$\|T(\tau)^m\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \le M$$

for any $m \in \mathbb{N}$ and $\tau \ge 0$.

Proof. After the change of variables: $\tau = \sigma n/m$, one proves the first statement since it reduces to the estimate (5.7):

$$\sup_{\tau\ge 0} \|T(\tau/n)^m\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} = \sup_{\sigma n/m \ge 0} \|T(\sigma/m)^m\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \le M .$$

Setting $n = 1$ we get the second statement. □

6. Convergence in the strong topology

Theorem 4.5 yields the existence and uniqueness of a solution operator $U(t,s)$, $(t,s)\in\Delta$, for the evolution equation (1.3). This solution operator may be approximated by the product-type formulae in different operator topologies under hypothesis from Assumption 1.1 and stability conditions.

We start by the claim that the classical Trotter formula can be used to prove the *strong* operator convergence in $L^p(\mathcal{I},X)$ of the product approximants for the semigroup generated by $\mathcal{K}$.

Theorem 6.1. Let the assumptions (A1), (A3) and (A4) be satisfied. Let $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ be the induced multiplication operators in $L^p(\mathcal{I},X)$. Define $\mathcal{K}_0 := \overline{D_0+\mathcal{A}}$ and let $\mathcal{K}=\mathcal{K}_0+\mathcal{B}$.

(i) If the operator family $\{C(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ is stable, then

$$e^{-\tau\mathcal{K}} = \mathrm{s}-\lim_{n\to\infty}\,(e^{-\frac{\tau}{n}D_0}e^{-\frac{\tau}{n}(\mathcal{A}+\mathcal{B})})^n = \mathrm{s}-\lim_{n\to\infty}\,(e^{-\frac{\tau}{n}(\mathcal{A}+\mathcal{B})}e^{-\frac{\tau}{n}D_0})^n$$

in the strong operator topology uniformly in $\tau\geq 0$.

(ii) If the operator family $\{B(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ is stable with respect to A, then

$$e^{-\tau\mathcal{K}} = \mathrm{s}-\lim_{n\to\infty}\,(e^{-\frac{\tau}{n}\mathcal{K}_0}e^{-\frac{\tau}{n}\mathcal{B}})^n = \mathrm{s}-\lim_{n\to\infty}\,(e^{-\frac{\tau}{n}\mathcal{B}}e^{-\frac{\tau}{n}\mathcal{K}_0})^n$$

in the strong operator topology uniformly in $\tau\geq 0$.

Proof. The proof follows immediately from Proposition 4.4, Proposition 5.3 and Proposition 5.7. □

Theorem 6.1 provides information about the strong convergence of the Trotter product formula in $L^p(\mathcal{I},X)$. Notice that two different operator splittings of the operator $\mathcal{K}$ yield in Theorem 6.1 two different product approximations (i) and (ii).

Let $\{\{U_n(t,s)\}_{(t,s))\in\Delta}\}_{n\in\mathbb{N}}$ be the operator family defined by (1.6) and let $\{\mathcal{U}(\tau)\}_{\tau\geq 0}$ be the semigroup generated by $\mathcal{K}$, i.e., $e^{-\tau\mathcal{K}}=e^{-\tau(\mathcal{B}+\mathcal{K}_0)}=\mathcal{U}(\tau)$. Then for any $f\in L^p(\mathcal{I},X)$ one gets

$$((e^{-\frac{\tau}{n}\mathcal{B}}e^{-\frac{\tau}{n}\mathcal{K}_0})^n f)(t) = U_n(t,t-\tau)\chi_{\mathcal{I}}(t-\tau)f(t-\tau), \qquad t\in\mathcal{I}\ .$$

Since

$$(e^{-\tau\mathcal{K}}f)(t) = (e^{-\tau(\mathcal{B}+\mathcal{K}_0)}f)(s) = (\mathcal{U}(\tau)f)(s) = U(t,t-\tau)\chi_{\mathcal{I}}(t-\tau)f(s-\tau)\ ,$$

we conclude that

$$(\{(e^{-\frac{\tau}{n}\mathcal{B}}e^{-\frac{\tau}{n}\mathcal{K}_0})^n - e^{-\tau(\mathcal{B}+\mathcal{K}_0)}\}f)(t) = \\ = \{U_n(t,t-\tau)-U(t,t-\tau)\}\chi_{\mathcal{I}}(t-\tau)f(t-\tau)\ . \tag{6.1}$$

Note that the product formula in a different order yields

$$
\begin{aligned}
&(\{(e^{-\frac{\tau}{n}\mathcal{K}_0}e^{-\frac{\tau}{n}\mathcal{B}})^n - e^{-\tau\mathcal{K}}\}f)(t) = \\
&\qquad = \{U'_n(t,t-\tau) - U(t,t-\tau)\}\,\chi_{\mathcal{I}}(t-\tau)f(t-\tau)\ ,
\end{aligned}
$$

where the approximating propagator is given by

$$
\begin{aligned}
U'_n(t,s) &:= \prod_{j=0}^{n-1\leftarrow} G'_j(t,s\,;n), \quad n = 1,2,\dots\ , \\
G'_j(t,s\,;n) &:= e^{-\frac{t-s}{n}A}e^{-\frac{t-s}{n}B(s+j\frac{t-s}{n})}, \quad j = 0,1,2,\dots,n\ .
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

Note that for the case of Theorem 6.1 (i) the Trotter product approximations get the form

$$
V_n(t,s) := \prod_{j=1}^{n\leftarrow} e^{-\frac{t-s}{n}C(s+j\frac{t-s}{n})} \quad \text{and} \quad V'_n(t,s) := \prod_{j=0}^{n-1\leftarrow} e^{-\frac{t-s}{n}C(s+j\frac{t-s}{n})}\ , \tag{6.3}
$$

for $(t,s) \in \Delta$, $n = 1,2,\dots$ and $C(t) = A + B(t)$.

Theorem 6.2. Let the assumptions (A1), (A3) and (A4) be satisfied.

(i) If the family $\{C(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ is stable, then

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty}\sup_{\tau\in\mathcal{I}}\int_0^{T-\tau} ds\,\|\{V_n(s+\tau,s) - U(s+\tau,s)\}x\|_X^p \\
&= \lim_{n\to\infty}\sup_{\tau\in\mathcal{I}}\int_0^{T-\tau} ds\,\|\{V'_n((s+\tau,s) - U(s+\tau,s)\}x\|_X^p\ ,
\end{aligned}
$$

for any $p \in [1,\infty)$ and $x \in X$, where the families $\{\{V_n(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}\}_{n\in\mathbb{N}}$ and $\{\{V'_n(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}\}_{n\in\mathbb{N}}$ are defined by (6.3).

(ii) If the family $\{B(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ is stable with respect to A, then

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty}\sup_{\tau\in\mathcal{I}}\int_0^{T-\tau} ds\,\|\{U_n(s+\tau,s) - U(s+\tau,s)\}x\|_X^p \\
&= \lim_{n\to\infty}\sup_{\tau\in\mathcal{I}}\int_0^{T-\tau} ds\,\|\{U'_n(s+\tau,s) - U(s+\tau,s)\}x\|_X^p\ ,
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

for any $p \in [1,\infty)$ and $x \in X$, where the families $\{\{U_n(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}\}_{n\in\mathbb{N}}$ and $\{\{U'_n(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}\}_{n\in\mathbb{N}}$ are defined, respectively, by (1.6) and (6.2).

Proof. We prove only the statement for $\{\{U_n(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}\}_{n\in\mathbb{N}}$. The other statements can be proved similarly.

Take $f = \phi \otimes x \in L^p(\mathcal{I}) \otimes X \cong L^p(\mathcal{I}, X)$ for $x \in X$ and $\phi \in L^p(\mathcal{I})$. Then, we have

$$\begin{aligned}
&\| \left((e^{-\frac{\tau}{n}\mathcal{B}} e^{-\frac{\tau}{n}\mathcal{K}_0})^n - e^{-\tau K}\right) f\|_{L^p}^p = \\
&= \int_0^T ds\, \|\{U_n(s, s-\tau) - U(s, s-\tau)\}\chi_{\mathcal{I}}(s-\tau) f(s-\tau)\|_X^p = \\
&= \int_0^{T-\tau} ds\, \|\{U_n(s+\tau, s) - U(s+\tau, s)\} f(s)\|_X^p \\
&= \int_0^{T-\tau} ds\, |\phi(s)|^p \|\{U_n(s+\tau, s) - U(s+\tau, s)\} x\|_X^p \ ,
\end{aligned}$$

$\tau \in \mathcal{I}$, which proves the claim if $\phi(t) = 1$ a.e. in $\mathcal{I}$. $\square$

Remark 6.3. We note that the corresponding convergences in Theorem 6.1 and in Theorem 6.2 are equivalent.

7. Convergence in the operator-norm topology

In §6 we proved the convergence of the product approximants $U_n(t, s)$ to solution operator $U(t, s)$ in the strong operator topology. In applications, a convergence in the operator-norm topology is useful, especially if the rate of convergence can be estimated. Then in contrast to analysis in [3] we obtain a *vector-independent* estimate of accuracy of the solution approximation by the product formulae. However, it can happen that the convergence rate is better for "smooth" vectors.

In this section, we want to estimate the convergence-rate of for $\sup_{(t,s)\in\Delta} \|U(t, s) - U_n(t, s)\|_{\mathscr{L}(X)} \longrightarrow 0$, when $n \to \infty$. An important ingredient for that is to estimate the error bound for the Trotter product formula approximation of the evolution semigroup: $\sup_{\tau \geq 0} \|(e^{-\tau\mathcal{B}/n} e^{-\tau\mathcal{K}_0/n})^n - e^{-\tau\mathcal{K}}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \longrightarrow 0$, when $n \to \infty$.

7.1. Technical Lemmata

Here we state and we prove all technical lemmata that we need for demonstration of convergence and for estimate of the error bound for the Trotter product formula approximations in the operator-norm in $L^p(\mathcal{I}, X)$.

Lemma 7.1. Assume (A1), (A2) and (A5). Then, the operator $\overline{\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}}$ is bounded on $L^p(\mathcal{I}, X)$ and the norm $\|\overline{\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \leq C_1^*$, $p \in [1, \infty)$.

Proof. Let $x \in \mathrm{dom}(A) \subset \mathrm{dom}(B(t))$ and $\xi \in X^*$. Then, it holds that

$$|\langle A^{-1}B(t)x, \xi\rangle| = |\langle x, B(t)^*(A^{-1})^*\xi\rangle| \leq C_\alpha^* \|x\| \, \|\xi\|, \quad \text{a.e. t} \in \mathcal{I}.$$

Since $\mathrm{dom}(A) \subset X$ is dense, we conclude that $\operatorname{ess\,sup}_{t\in\mathcal{I}} \|\overline{A^{-1}B(t)}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq C_1^*$. Let $\Gamma \in L^p(\mathcal{I}; X)^*$. By Proposition 2.3 (iii) we find

$$\Gamma(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}f) = \int_{\mathcal{I}} \langle A^{-1}B(t)f(t), \Psi(t)\rangle dt, \quad f \in \mathrm{dom}(\mathcal{B}).$$

Then the estimate $\operatorname{ess\,sup}_{t\in\mathcal{I}}\|\overline{A^{-1}B(t)}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq C_1^*$ implies

$$|\Gamma(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}f)| \leq C_1^*\|f\|_{L^p(\mathcal{I},X)} \left(\int_{\mathcal{I}} \|\Psi(t)\|^{p'}dt\right)^{1/p'},$$

$f \in \operatorname{dom}(\mathcal{B})$, $\Gamma \in L^p(\mathcal{I},X)^*$, which yields

$$|\Gamma(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}f)| \leq C_1^*\|f\|_{L^p(\mathcal{I},X)}\|\Gamma\|_{L^p(\mathcal{I},X)^*}, \quad f \in \operatorname{dom}(\mathcal{B}).$$

Hence we get $\|\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}f\|_{L^p(\mathcal{I},X)} \leq C_1^*\|f\|_{L^p(\mathcal{I},X)}$, $f \in \operatorname{dom}(\mathcal{B})$, which proves the claim. □

Remark 7.2. By assumption ($A1$) the operator $\mathcal{A}$ generates a holomorphic semigroup. Note that the operator $\mathcal{K}_0$ is not a generator of a holomorphic semigroup. Indeed, we have

$$(e^{-\tau\mathcal{K}_0}f)(t) = (e^{-\tau D_0}e^{-\tau A}f)(t) = e^{-\tau A}f(t-\tau)\chi_{\mathcal{I}}(t-\tau), \quad f \in L^p(\mathcal{I},X)\ .$$

Since the right-hand side is zero for $\tau \geq t$, the semigroup has no analytic extension to the complex plane $\mathbb{C}$.

We comment that in general, $\operatorname{dom}(\mathcal{K}_0) \subset \operatorname{dom}(\mathcal{A})$ does not hold, but we can prove the following inclusion.

Lemma 7.3. Let the assumption (A1) be satisfied. Then for $\alpha \in [0,1)$ one gets that

$$\operatorname{dom}(\mathcal{K}_0) \subset \operatorname{dom}(\mathcal{A}^\alpha)\ . \tag{7.1}$$

Proof. We know that the semigroup, which is generated by $\mathcal{K}_0$, is nilpotent, i.e. $e^{-\tau\mathcal{K}_0} = 0$ holds for $\tau \geq T$. Hence, generator $\mathcal{K}_0$ has empty spectrum. Since the semigroup is nilpotent, one gets

$$\mathcal{A}^\alpha\mathcal{K}_0^{-1}f = \mathcal{A}^\alpha\int_0^\infty e^{-\tau\mathcal{K}_0}fd\tau = \int_0^T e^{-\tau D_0}\mathcal{A}^\alpha e^{-\tau\mathcal{A}}fd\tau, \quad f \in L^p(\mathcal{I},X)\ .$$

For $\alpha \in [0,1)$ and $\tau > 0$, we obtain $\|\mathcal{A}^\alpha e^{-\tau\mathcal{A}}\| \leq M_\alpha^A/\tau^\alpha$ and in addition:

$$\int_0^T \tau^{-\alpha}d\tau = \frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha} < \infty\ .$$

So, the integrand $\mathcal{A}^\alpha e^{-\tau D_0}e^{-\tau\mathcal{A}}f$ for $\tau > 0$ is integrable on $[0,\infty)$, that implies the claim. □

Lemma 7.4. Let the assumptions (A1), (A2), and (A3) be satisfied. Then there is a constant $\Lambda_\alpha > 0$ such that

$$\|\mathcal{A}^\alpha e^{-\tau\mathcal{K}}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \leq \frac{\Lambda_\alpha}{\tau^\alpha}, \quad \tau > 0. \tag{7.2}$$

Proof. Note that the following holds

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\sigma}e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0}e^{-\sigma\mathcal{K}}f &= e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0}\mathcal{K}_0 e^{-\sigma\mathcal{K}}f + e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0}(-\mathcal{K})e^{-\sigma\mathcal{K}}f \\ &= -e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0}\mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{K}}f \ .\end{aligned}$$

So, we get

$$\int_0^\tau e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0}\mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{K}}f d\sigma = e^{-\tau\mathcal{K}_0}f - e^{-\tau\mathcal{K}}f \ ,$$

and hence

$$\mathcal{A}^\alpha e^{-\tau\mathcal{K}}f = \mathcal{A}^\alpha e^{-\tau\mathcal{K}_0}f - \mathcal{A}^\alpha \int_0^\tau e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0}\mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{K}}f d\sigma \ .$$

Now, we estimate the two terms in the right-hand side. First we find that

$$\|\mathcal{A}^\alpha e^{-\tau\mathcal{K}_0}f\|_{L^p(\mathcal{I},X)} \leq \|A^\alpha e^{-\tau A}f(\cdot-\tau)\|_{L^p(\mathcal{I},X)} \leq \frac{M_\alpha^A}{\tau^\alpha}\|f\|_{L^p(\mathcal{I},X)} \ .$$

Now, let $f \in \mathrm{dom}(K)$. Since $\mathrm{dom}(\mathcal{K}) = \mathrm{dom}(\mathcal{K}_0) \subset \mathrm{dom}(\mathcal{A}^\alpha)$ (see Lemma 7.3), one gets

$$\mathcal{A}^\alpha \int_0^\tau d\sigma\, e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0}\mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{K}}f = \int_0^\tau d\sigma\, \mathcal{A}^\alpha e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0}\mathcal{B}\mathcal{A}^{-\alpha}\mathcal{A}^\alpha e^{-\sigma\mathcal{K}}f \ .$$

There is a constant $C_\alpha > 0$, such that $\|\mathcal{B}\mathcal{A}^{-\alpha}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \leq C_\alpha$ (cf. Lemma 4.3). Then we find the estimate for the sum of two terms:

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{A}^\alpha e^{-\tau\mathcal{K}}f\|_{L^p(\mathcal{I},X)} \leq \frac{M_\alpha^A}{\tau^\alpha}\|f\|_{L^p(\mathcal{I},X)} + \\ &+\int_0^\tau \|\mathcal{A}^\alpha e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))}\cdot\|\mathcal{B}\mathcal{A}^{-\alpha}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))}\cdot\|\mathcal{A}^\alpha e^{-\sigma K}f\|_{L^p(\mathcal{I},X)}d\sigma \leq \\ &\leq \frac{M_\alpha^A}{\tau^\alpha}\|f\|_{L^p(\mathcal{I},X)} + C_\alpha\int_0^\tau \frac{M_\alpha^A}{(\tau-\sigma)^\alpha}\|\mathcal{A}^\alpha e^{-\sigma\mathcal{K}}f\|_{L^p(\mathcal{I},X)}d\sigma \ .\end{aligned}$$

Let $\|f\|_{L^p(\mathcal{I},X)} \leq 1$ and we introduce $F(\tau) := \|\mathcal{A}^\alpha e^{-\tau\mathcal{K}}f\|_{L^p(\mathcal{I},X)}$. Then the Gronwall-type inequality [10, Theorem 2.25]

$$0 \leq F(\tau) \leq c_1\tau^{-\alpha} + c_2\int_0^\tau F(\sigma)(\tau-\sigma)^{-\alpha}d\sigma,$$

is satisfied, where $c_1 = M_\alpha^A$ and $c_2 = C_\alpha M_\alpha^A$. The Gronwall-type theorem states that the estimate $F(\tau)\tau^\alpha \leq 2c_1$ is valid for $\tau \in [0,\tau_0]$, where $\tau_0 = \sigma_\alpha \cdot \min\left\{1/c_2, (1/c_2)^{1/(1-\alpha)}\right\}$ and σ_α depends only on α. Hence, we obtain

$$\|\mathcal{A}^\alpha e^{-\tau\mathcal{K}}f\| \leq \frac{2M_\alpha^A}{\tau^\alpha} \ , \tag{7.3}$$

for $\tau \in (0, \tau_0]$. Since $e^{-\tau\mathcal{K}}f = 0$ for $\tau \geq T$ it remains to consider the case $0 < \tau_0 < T$. If $\tau \in (\tau_0, T]$, then we find

$$\|\mathcal{A}^\alpha e^{-\tau\mathcal{K}}f\| \leq \|\mathcal{A}^\alpha e^{-\tau_0\mathcal{K}}e^{-(\tau-\tau_0)\mathcal{K}}f\| \leq \frac{2M_\alpha^A\, M_\mathcal{K}}{\tau_0^\alpha}\ ,$$

where $\|e^{-\tau\mathcal{K}}f\| \leq M_\mathcal{K}$ for $\tau \geq 0$ and $\|f\|_{L^p(\mathcal{I},X)} \leq 1$. Here we have used that any evolution semigroup is bounded. Hence

$$\|\mathcal{A}^\alpha e^{-\tau\mathcal{K}}f\| \leq \frac{\tau^\alpha}{\tau_0^\alpha}\frac{2M_\alpha^A\, M_\mathcal{K}}{\tau^\alpha} \leq \frac{T^\alpha}{\tau_0^\alpha}\frac{2M_\alpha^A\, M_\mathcal{K}}{\tau^\alpha}\ ,$$

for $\tau \in (\tau_0, T]$ and $\|f\|_{L^p(\mathcal{I},X)} \leq 1$. Setting $\Lambda_\alpha := \max\left\{2M_\alpha^A, (2M_\alpha^A\, M_\mathcal{K} T^\alpha)/\tau_0^\alpha\right\}$ and taking the supremum over the unit ball we complete the proof. □

Lemma 7.5. Let the assumptions (A1), (A3) and (A4) be satisfied . If the family of generators $\{B(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ is stable with respect to A, then there exist constants $c_1 > 0$ and $c_2 > 0$ such that

$$\|\overline{T(\tau)^k\mathcal{A}}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \leq \frac{c_1}{\tau^\alpha} + \frac{c_2}{k\tau}, \quad \tau > 0\ , \quad k \in \mathbb{N}. \tag{7.4}$$

Proof. For $k\tau \geq T$ we have $T(\tau)^k = 0$. Hence, one has to prove the estimate (7.4) only for $k\tau \leq T$. By Lemma 5.8 we get that $\|T(\tau)^k\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \leq M$ for some positive constant M. Let $f \in \mathrm{dom}(\mathcal{A})$. Then

$$\begin{aligned}
&\|T(\tau)^k\mathcal{A}f\| \\
&\leq \|(T(\tau)^k - e^{-k\tau\mathcal{K}_0})\mathcal{A}f\| + \|e^{-k\tau\mathcal{K}_0}\mathcal{A}f\| \\
&\leq \|\sum_{j=0}^{k-1} T(\tau)^{k-(j+1)}(e^{-\tau\mathcal{B}} - I)e^{-(j+1)\tau\mathcal{K}_0}\mathcal{A}f\| + \|e^{-k\tau\mathcal{K}_0}\mathcal{A}f\| \\
&\leq M\sum_{j=0}^{k-1}\int_0^\tau d\sigma\|e^{-\sigma\mathcal{B}}\mathcal{B}\mathcal{A}^{-\alpha}\|\ \|\mathcal{A}^{1+\alpha}e^{-(j+1)\tau\mathcal{K}_0}f\| + \|e^{-k\tau\mathcal{K}_0}\mathcal{A}f\|,
\end{aligned}$$

where we have used $I - e^{-\tau\mathcal{B}} = \int_0^\tau d\sigma\, \mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{B}}$. We have $\|e^{-\sigma\mathcal{B}}\| \leq M_B e^{\gamma_B\sigma} \leq M_B e^{\gamma_B T} =: M'_B$. By Proposition 2.2 we get

$$\|\mathcal{A}^{1+\alpha}e^{-(j+1)\tau\mathcal{K}_0}f\| \leq \frac{M_{1+\alpha}^A}{((j+1)\tau)^{1+\alpha}}\|f\|\ ,$$

$$\|\mathcal{A}e^{-k\tau\mathcal{K}_0}f\| \leq \frac{M_\alpha^A}{k\tau}\|f\|\ .$$

Therefore, one obtains the estimate:

$$\begin{aligned}
\|T(\tau)^k\mathcal{A}f\| &\leq \frac{MM'_B M_{1+\alpha}^A C_\alpha \tau}{\tau^{\alpha+1}}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{(j+1)^{\alpha+1}}\|f\| + \frac{M_1^A}{k\tau}\|f\| \\
&\leq \frac{MM'_B M_{1+\alpha}^A C_\alpha \zeta(\alpha+1)}{\tau^\alpha}\|f\| + \frac{M_1^A}{k\tau}\|f\|\ ,
\end{aligned}$$

where $\zeta(\alpha+1) := \sum_{j=1}^{\infty} 1/j^{\alpha+1}$ is the Riemann ζ-function. Since $T(\tau)^k = 0$ for $\tau k \geq T$, we find

$$\|T(\tau)^k \mathcal{A} f\| \leq \frac{MM'_B M^A_{1+\alpha} C_\alpha \zeta(\alpha+1)}{\tau^\alpha}\|f\| + \frac{M^A_1}{k\tau}\|f\|, \quad f \in \mathrm{dom}(\mathcal{A}) \ .$$

Then estimate (7.4) follows by taking supremum over the unit ball in $\mathrm{dom}(\mathcal{A})$. □

Lemma 7.6. Let the assumptions (A1), (A3), (A4), and (A5) be satisfied. Then there is a constant $c > 0$ such that for $\tau \geq 0$ we have inequalities :

$$\|(T(\tau) - e^{-\tau\mathcal{K}})\mathcal{A}^{-\alpha}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \leq c\tau \ \text{ and } \ \|\mathcal{A}^{-1}(T(\tau) - e^{-\tau\mathcal{K}})\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \leq c\tau \ .$$

Proof. (i) Using the representation

$$T(\tau)g - e^{-\tau\mathcal{K}}g = (e^{-\tau\mathcal{B}} - I)e^{-\tau\mathcal{K}_0}g + e^{-\tau\mathcal{K}_0} - e^{-\tau\mathcal{K}}g, \quad g \in L^p(\mathcal{I}, X),$$

we get

$$\|(T(\tau) - e^{-\tau\mathcal{K}})\mathcal{A}^{-\alpha}f\| \leq \ \|(e^{-\tau\mathcal{B}} - I)\mathcal{A}^{-\alpha}e^{-\tau\mathcal{K}_0}f\| + \|(e^{-\tau\mathcal{K}_0} - e^{-\tau\mathcal{K}})\mathcal{A}^{-\alpha}f\| \tag{7.5}$$

for $\tau \geq 0$, $g = \mathcal{A}^{-\alpha}f$ and $f \in L^p(\mathcal{I}, X)$. From the representation

$$(I - e^{-\tau\mathcal{B}})g = \int_0^\tau e^{-s\mathcal{B}}\mathcal{B}\, g\, ds, \qquad g \in \mathrm{dom}(\mathcal{B}),$$

we obtain

$$\|(I - e^{-\tau\mathcal{B}})\mathcal{A}^{-\alpha}g\| \leq \tau\, \|\mathcal{B}\mathcal{A}^{-\alpha}\|\, M_B\, e^{\beta_B T}\|g\| \qquad g \in \mathrm{dom}(\mathcal{B}), \quad \tau \geq 0 \ .$$

Then setting $g = e^{-\tau\mathcal{K}_0}f$, $f \in L^p(\mathcal{I}, X)$, and using the estimate $\|e^{-\tau\mathcal{K}_0}f\| \leq M_A$, $\tau \geq 0$, for the first term in the right-hand side of (7.5) one gets the estimate

$$\|(I - e^{-\tau\mathcal{B}})\mathcal{A}^{-\alpha}e^{-\tau\mathcal{K}_0}f\| \leq \tau\, C_\alpha\, M_B\, M_A\, e^{\gamma_B T}\|f\|, \quad \tau \geq 0 \ , \tag{7.6}$$

where we also used that $e^{-\tau\mathcal{K}_0} = 0$ for $\tau \geq T$. To estimate the second term note that

$$e^{-\tau\mathcal{K}}g - e^{-\tau\mathcal{K}_0}g = \int_0^\tau \frac{d}{d\sigma}\{e^{-\sigma\mathcal{K}}e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0}\}gd\sigma = -\int_0^\tau e^{-\sigma\mathcal{K}}\mathcal{B}e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0}gd\sigma \ ,$$

$g \in \mathrm{dom}(\mathcal{K}_0)$. Let $g \in \mathcal{A}^{-\alpha}f$, $f \in \mathcal{A}^\alpha\, \mathrm{dom}(\mathcal{K}_0)$. Then

$$(e^{-\tau\mathcal{K}} - e^{-\tau\mathcal{K}_0})\mathcal{A}^{-\alpha}f = -\int_0^\tau e^{-\sigma\mathcal{K}}\mathcal{B}e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0}\mathcal{A}^{-\alpha}fd\sigma \ ,$$

which leads to the estimate

$$\|(e^{-\tau\mathcal{K}} - e^{-\tau\mathcal{K}_0})\mathcal{A}^{-\alpha}f\| \leq \tau\, C_\alpha M_\mathcal{K}\, M_A\|f\|, \qquad \tau \geq 0 \ , \tag{7.7}$$

$f \in \mathcal{A}^\alpha \operatorname{dom}(\mathcal{K}_0)$. Since $\mathcal{A}^\alpha \operatorname{dom}(\mathcal{K}_0)$ is dense in $L^p(\mathcal{I}, X)$ the estimate extends to $f \in L^p(\mathcal{I}, X)$. Taking into account (7.5), (7.6), and(7.7) we get the first of the claimed in lemma inequalities.

(ii) To prove the second inequality we note that

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{A}^{-1}(e^{-\tau\mathcal{B}}e^{-\tau\mathcal{K}_0} - e^{-\tau\mathcal{K}})f\| \\ &\quad \le \|\mathcal{A}^{-1}(e^{-\tau\mathcal{B}} - I)e^{-\tau\mathcal{K}_0}f\| + \|\mathcal{A}^{-1}(e^{-\tau\mathcal{K}_0} - e^{-\tau\mathcal{K}})f\| \end{aligned} \tag{7.8}$$

$f \in \operatorname{dom}(\mathcal{K}_0) = \operatorname{dom}(\mathcal{K})$. Using

$$\mathcal{A}^{-1}(I - e^{-\tau\mathcal{B}})e^{-\tau\mathcal{K}_0}f = \int_0^\tau d\sigma\, \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{B}}e^{-\tau\mathcal{K}_0}f \ ,$$

one finds the estimate for the first term in the right-hand side of (7.8):

$$\|\mathcal{A}^{-1}(I - e^{-\tau\mathcal{B}})e^{-\tau\mathcal{K}_0}f\| \le \tau\, C_1^* M_B\, M_A\, e^{\gamma_B T}\, \|f\|, \quad \tau \ge 0 \ . \tag{7.9}$$

For the second term we start with identity

$$e^{-\tau\mathcal{K}_0}f - e^{-\tau\mathcal{K}}f = \int_0^\tau \frac{d}{d\sigma}\{e^{-\sigma\mathcal{K}}e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}}\}f d\sigma = \int_0^\tau d\sigma\, e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\mathcal{B}e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}}f \ ,$$

which leads to

$$\mathcal{A}^{-1}(e^{-\tau\mathcal{K}_0} - e^{-\tau\mathcal{K}})f = \int_0^\tau d\sigma\, \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}}f \ ,$$

for any $f \in \operatorname{dom}(\mathcal{K}) = \operatorname{dom}(\mathcal{K}_0)$. Hence, we get the estimate

$$\|\mathcal{A}^{-1}(e^{-\tau\mathcal{K}_0} - e^{-\tau\mathcal{K}})f\| \le \tau\, C_1^* M_A\, M_{\mathcal{K}}\|f\|, \quad \tau \ge 0 \ . \tag{7.10}$$

Summarising now (7.8), (7.9), and (7.10), we obtain the second of the claimed in lemma inequalities. □

Lemma 7.7. Let the assumptions (A1), (A3), (A4), (A5), and (A6) be satisfied. If $\beta \in (\alpha, 1)$, then there exists a constant $Z(\beta) > 0$ such that

$$\|\mathcal{A}^{-1}(T(\tau) - e^{-\tau\mathcal{K}})\mathcal{A}^{-\beta}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \le Z(\beta)\tau^{1+\beta}, \quad \tau \ge 0. \tag{7.11}$$

Proof. Let $f \in \operatorname{dom}(\mathcal{K}_0) = \operatorname{dom}(\mathcal{K})$. Then identity

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\sigma}T(\sigma)e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}}f = \frac{d}{d\sigma}e^{-\sigma\mathcal{B}}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}}f \\ &= - e^{-\sigma\mathcal{B}}\mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}}f - e^{-\sigma\mathcal{B}}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\mathcal{K}_0e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}}f + \\ &\quad + e^{-\sigma\mathcal{B}}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}Ke^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}}f \\ &= - e^{-\sigma\mathcal{B}}\mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}}f + e^{-\sigma\mathcal{B}}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\mathcal{B}e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}}f \\ &= e^{-\sigma\mathcal{B}}\{e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\mathcal{B}f - \mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\}e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}}f, \end{aligned}$$

yields

$$\begin{aligned} T(\tau)f - e^{-\tau\mathcal{K}}f &= \int_0^\tau \frac{d}{d\sigma} T(\sigma) e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}} f d\sigma \\ &= \int_0^\tau e^{-\sigma\mathcal{B}}\{e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\mathcal{B} - \mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\} e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}} f d\sigma. \end{aligned} \tag{7.12}$$

On the other hand we also have the following identity:

$$\begin{aligned} & e^{-\sigma\mathcal{B}}\left(e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\mathcal{B} - \mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\right) e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}} f \\ &\quad = (e^{-\sigma\mathcal{B}} - I)\{e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\mathcal{B} - \mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\}(e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}} - e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0})f + \\ &\qquad + (e^{-\sigma\mathcal{B}} - I)\{e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\mathcal{B} - \mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\}e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0} f + \\ &\qquad + \{e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\mathcal{B} - \mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\}(e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}} - e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0})f + \\ &\qquad + \{e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\mathcal{B} - \mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\}e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0} f \ , \end{aligned}$$

which yields for $f = \mathcal{A}^{-\beta} g$

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}^{-1} e^{-\sigma\mathcal{B}}\left(e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\mathcal{B} - \mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\right) e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}} \mathcal{A}^{-\beta} g = \\ &\quad = \mathcal{A}^{-1}(e^{-\sigma\mathcal{B}} - I)\{e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\mathcal{B} - \mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\}(e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}} - e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0})\mathcal{A}^{-\beta} g + \\ &\qquad + \mathcal{A}^{-1}(e^{-\sigma\mathcal{B}} - I)\{e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\mathcal{B} - \mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\}\mathcal{A}^{-\beta} e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0} g + \\ &\qquad + \mathcal{A}^{-1}\{e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\mathcal{B} - \mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\}(e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}} - e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0})\mathcal{A}^{-\beta} g + \\ &\qquad + \mathcal{A}^{-1}\{(e^{-\sigma\mathcal{K}_0} - e^{-\sigma D_0})\mathcal{B} - \mathcal{B}(e^{-\sigma\mathcal{K}_0} - e^{-\sigma D_0})\}e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0}\mathcal{A}^{-\beta} g + \\ &\qquad + \mathcal{A}^{-1}(e^{-\sigma D_0}\mathcal{B} - \mathcal{B}e^{-\sigma D_0})\mathcal{A}^{-\beta} e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0} g. \end{aligned} \tag{7.13}$$

In the following, we estimate separately the five terms in the right-hand side of identity (7.13).

To this end we note that $\mathcal{A}$ and $\mathcal{K}_0$ commute. This implies that

$$(e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}} - e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0})\mathcal{A}^{-\beta} g = \int_0^{\tau-\sigma} dr\, e^{-(\tau-\sigma-r)\mathcal{K}}\mathcal{B}\mathcal{A}^{-\beta} e^{-r\mathcal{K}_0} g \ .$$

Thus, for the first term we get

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}^{-1}(e^{-\sigma\mathcal{B}} - I)\{e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\mathcal{B} - \mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\}(e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}} - e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0})\mathcal{A}^{-\beta} g \\ &\quad = -\int_0^\sigma dr\, \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}e^{-r\mathcal{B}}\,[e^{-\sigma\mathcal{K}_0}, \mathcal{B}]\mathcal{A}^{-\beta} \int_0^{\tau-\sigma} dr\, \mathcal{A}^{\beta} e^{-(\tau-\sigma-r)\mathcal{K}}\mathcal{B}\mathcal{A}^{-\beta} e^{-r\mathcal{K}_0} g \ , \end{aligned}$$

where

$$[e^{-\sigma\mathcal{K}_0}, \mathcal{B}]f := \{e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\mathcal{B} - \mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\}f, \quad f \in \mathrm{dom}(\mathcal{K}_0), \quad \tau \geq 0.$$

Then using Lemma 7.4, we obtain the estimate

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{A}^{-1}(e^{-\sigma\mathcal{B}} - I)\{e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\mathcal{B} - \mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\}(e^{-(\tau-\sigma)K} - e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0})\mathcal{A}^{-\beta}g\| \\
&\qquad \leq \sigma\, 2C_1^* C_\beta^2 \Lambda_\beta M_B M_{\mathcal{A}}^2 e^{\gamma_B T} \int_0^{\tau-\sigma} dr\, \frac{1}{(\tau-\sigma-r)^\beta}\, \|g\| \\
&\qquad \leq \sigma(\tau-\sigma)^{1-\beta}\, \frac{2C_1^* C_\beta^2 \Lambda_\beta M_B M_{\mathcal{A}}^2 e^{\gamma_B T}}{1-\beta}\, \|g\|
\end{aligned}
\tag{7.14}
$$

for $\sigma \in [0,\tau]$ and $\tau \geq 0$.

For the second term, one can readily establish the estimate

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{A}^{-1}(e^{-\sigma\mathcal{B}} - I)\{e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\mathcal{B} - \mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\}\mathcal{A}^{-\beta}e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0}g\| \\
&\qquad \leq \sigma\, 2C_1^* C_\beta M_B M_{\mathcal{A}}^2 e^{\gamma_B T}\|g\|\ ,
\end{aligned}
\tag{7.15}
$$

for $\sigma \in [0,\tau]$ and $\tau \geq 0$.

Now note that by virtue of relation

$$
e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}} - e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0}h = \int_0^{\tau-\sigma} dr\, e^{-(\tau-r-\sigma)K}\mathcal{B}e^{-r\mathcal{K}_0}h\ , \quad h \in \mathrm{dom}(\mathcal{K}_0)\ ,
$$

one obtains for the third term the estimate

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{A}^{-1}\{e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\mathcal{B} - \mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\}(e^{-(\tau-\sigma)K} - e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0})\mathcal{A}^{-\beta}g\| \\
&\qquad \leq (\tau-\sigma)\, 2C_1^* C_\beta M_{\mathcal{A}}^2 M_{\mathcal{K}}\, \|g\|\ ,
\end{aligned}
\tag{7.16}
$$

for $\sigma \in [0,\tau]$ and $\tau \geq 0$.

Moreover, using the equality

$$
e^{-\sigma\mathcal{K}_0} - e^{-\sigma D_0}h = -\int_0^\sigma dr\, e^{-r\mathcal{K}_0}\mathcal{A}e^{-(\sigma-r)D_0}h\ ,
$$

we get for the fourth term:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A}^{-1}\{(e^{-\sigma\mathcal{K}_0} - e^{-\sigma D_0})\mathcal{B} - \mathcal{B}(e^{-\sigma\mathcal{K}_0} - e^{-\sigma D_0})\}e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0}\mathcal{A}^{-\beta}g = \\
&\Big(-\int_0^\sigma dr\, e^{-r\mathcal{K}_0}e^{-(\sigma-r)D_0}\mathcal{B}\mathcal{A}^{-\beta} + \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}\int_0^\sigma dr\, e^{-r\mathcal{K}_0}\mathcal{A}^{1-\beta}e^{-(\sigma-r)D_0}\Big)e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0}g
\end{aligned}
$$

which yields the estimate

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{A}^{-1}\{(e^{-\sigma\mathcal{K}_0} - e^{-\sigma D_0})\mathcal{B} - \mathcal{B}(e^{-\sigma\mathcal{K}_0} - e^{-\sigma D_0})\}e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0}\mathcal{A}^{-\beta}g\| \\
&\leq \sigma\, C_\alpha M_A\|g\| + C_1^* M_A\, M_{1-\beta}^A \int_0^\sigma dr\, \frac{1}{r^{1-\beta}}\, \|g\| \\
&= \left(\sigma\, C_\beta M_A + \sigma^\beta\, \frac{C_1^*\, M_A\, M_{1-\beta}^A}{\beta}\right)\, \|g\|
\end{aligned}
\tag{7.17}
$$

for $\sigma \in [0,\tau]$ and $\tau \geq 0$.

To estimate the fifth term, we note that

$$\begin{aligned}(e^{-\sigma D_0}\mathcal{B} - \mathcal{B}e^{-\sigma D_0})f = e^{-\sigma D_0}B(\cdot)f(\cdot) - \mathcal{B}\chi_{\mathcal{I}}(\cdot - \sigma)f(\cdot - \sigma) = \\ = \chi_{\mathcal{I}}(\cdot - \sigma)B(\cdot - \sigma)f(\cdot - \sigma) - B(\cdot)\chi_{\mathcal{I}}(\cdot - \sigma)f(\cdot - \sigma) = \\ = \chi_{\mathcal{I}}(\cdot - \sigma)\{B(\cdot - \sigma) - B(\cdot)\}f(\cdot - \sigma)\ ,\end{aligned}$$

and therefore, one gets

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{A}^{-1}(e^{-\sigma D_0}\mathcal{B} - \mathcal{B}e^{-\sigma D_0})\mathcal{A}^{-\beta}e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0}g\| \\ &\quad =\|\mathcal{A}^{-1}\{e^{-\sigma D_0}\mathcal{B} - \mathcal{B}e^{-\sigma D_0}\}\mathcal{A}^{-\beta}g\| \\ &\quad \leq \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathcal{I}} \|A^{-1}\{B(t-\sigma) - B(t)\}A^{-\beta}\|_{\mathscr{L}(X)}\ \|g\| \leq L_\beta\sigma^\beta\|g\|.\end{aligned} \tag{7.18}$$

for $\sigma \in [0,\tau]$ and $\tau \geq 0$.

From identity (7.13) we deduce the estimate

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{A}^{-1}e^{-\sigma\mathcal{B}}\left(e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\mathcal{B} - \mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\right)e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}}\mathcal{A}^{-\beta}g\| \\ &\quad \leq \|\mathcal{A}^{-1}(e^{-\sigma\mathcal{B}} - I)\{e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\mathcal{B} - \mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\}(e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}} - e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0})\mathcal{A}^{-\beta}g\| \\ &\quad\quad + \|\mathcal{A}^{-1}(e^{-\sigma\mathcal{B}} - I)\{e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\mathcal{B} - \mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\}\mathcal{A}^{-\beta}e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0}g\| \\ &\quad\quad + \|\mathcal{A}^{-1}\{e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\mathcal{B} - \mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\}(e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}} - e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0})\mathcal{A}^{-\beta}g\| \\ &\quad\quad + \|\mathcal{A}^{-1}\{(e^{-\sigma\mathcal{K}_0} - e^{-\sigma D_0})\mathcal{B} - \mathcal{B}(e^{-\sigma\mathcal{K}_0} - e^{-\sigma D_0})\}e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0}\mathcal{A}^{-\beta}g\| \\ &\quad\quad + \|\mathcal{A}^{-1}(e^{-\sigma D_0}\mathcal{B} - \mathcal{B}e^{-\sigma D_0})\mathcal{A}^{-\beta}e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}_0}g\|\ .\end{aligned}$$

for $\sigma \in [0,\tau]$ and $\tau \geq 0$. Now taking into account (7.14), (7.15), (7.16), (7.17), and (7.18) we find the estimate

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{A}^{-1}e^{-\sigma\mathcal{B}}\left(e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\mathcal{B} - \mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\right)e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}}\mathcal{A}^{-\alpha}g\| \leq \\ &\leq \Big\{\sigma(\tau-\sigma)^{1-\alpha}\frac{2C_1^*C_\beta^2\Lambda_\beta M_B M_A^2 e^{\gamma_B T}}{1-\beta} + \sigma\ 2C_1^*C_\beta M_B M_A^2 e^{\gamma_B T} + \\ &\quad (\tau-\sigma)\ 2C_1^*C_\beta M_A^2 M_{\mathcal{K}} + \sigma\ C_\beta M_A + \sigma^\beta\ \frac{C_1^*\ M_A\ M_{1-\beta}^A}{\beta} + \sigma^\beta\ L_\beta\Big\}\|g\|\end{aligned}$$

for $\sigma \in [0,\tau]$ and $\tau \geq 0$. Then setting

$$\begin{aligned}Z_1 &:= \frac{2C_1^*C_\beta^2\Lambda_\beta M_B M_A^2 e^{\gamma_B T}}{1-\beta} \\ Z_2 &:= 2C_1^*C_\beta M_B M_A^2 e^{\gamma_B T} + C_\beta M_A \\ Z_3 &:= 2C_1^*C_\beta M_A^2 M_{\mathcal{K}} \\ Z_4 &:= \frac{C_1^*\ M_A\ M_{1-\beta}^A}{\beta} + L_\beta\end{aligned}$$

we obtain

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{A}^{-1}e^{-\sigma\mathcal{B}}\left(e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\mathcal{B}-\mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\right)e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}}\mathcal{A}^{-\beta}g\|\\&\leq\Big\{Z_1\,\sigma(\tau-\sigma)^{1-\beta}+Z_2\,\sigma+Z_3\,(\tau-\sigma)+Z_4\,\sigma^{\beta}\Big\}\|g\|\;.\end{aligned}\tag{7.19}$$

Now we remark that (7.12) gives the representation

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}^{-1}(T(\tau)-e^{-\tau\mathcal{K}})\mathcal{A}^{-\beta}g\\&\quad=\int_0^\tau d\sigma\,\mathcal{A}^{-1}e^{-\sigma\mathcal{B}}\{e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\mathcal{B}-\mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\}e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}}\mathcal{A}^{-\beta}g\;,\end{aligned}$$

which yields the estimate

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{A}^{-1}(T(\tau)-e^{-\tau\mathcal{K}})\mathcal{A}^{-\beta}g\|\\&\quad\leq\int_0^\tau d\sigma\,\|\mathcal{A}^{-1}e^{-\sigma\mathcal{B}}\{e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\mathcal{B}-\mathcal{B}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}\}e^{-(\tau-\sigma)\mathcal{K}}\mathcal{A}^{-\beta}g\|\;.\end{aligned}$$

The inserting (7.19) into this estimate and using

$$\int_0^\tau\sigma\,(\tau-\sigma)^{1-\beta}d\sigma=\tau^{3-\beta}\int_0^1 x(1-x)^{1-\beta}dx=\tau^{3-\beta}B(2,2-\beta),$$

(where B is the *Beta-function*), we find for $\tau\geq 0$ the estimate

$$\|\mathcal{A}^{-1}(T(\tau)-e^{-\tau\mathcal{K}})\mathcal{A}^{-\beta}g\|\leq Z_1B(2,2-\beta)\,\tau^{3-\beta}+\frac{Z_2+Z_3}{2}\,\tau^2+\frac{Z_4}{1+\beta}\,\tau^{1+\beta}\;,$$

and consequently

$$\|\mathcal{A}^{-1}(T(\tau)-e^{-\tau\mathcal{K}})\mathcal{A}^{-\beta}g\|\leq\left(Z_1B(2,2-\beta)\tau^{2-2\beta}+\frac{Z_2+Z_3}{2}\tau^{1-\beta}+Z_4\right)\,\tau^{1+\beta}\;.$$

Since $T(\tau)=0$ and $e^{-\tau\mathcal{K}}=0$ for $\tau\geq T$ we finally obtain

$$\|\mathcal{A}^{-1}(T(\tau)-e^{-\tau\mathcal{K}})\mathcal{A}^{-\beta}g\|\leq\left(Z_1B(2,2-\beta)T^{2-2\beta}+\frac{Z_2+Z_3}{2}T^{1-\beta}+Z_4\right)\,\tau^{1+\beta}\;,$$

which proves the lemma. □

7.2. The Trotter product formula in operator-norm topology

Theorem 7.8. Let the assumptions (A1), (A3), (A4), (A5), and (A6) be satisfied. If the family of generators $\{B(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ is stable with respect to A and $\beta\in(\alpha,1)$, then there exists a constant $C_{\alpha,\beta}>0$ such that

$$\|(e^{-\tau\mathcal{B}/n}e^{-\tau\mathcal{K}_0/n})^n-e^{-\tau\mathcal{K}}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))}\leq\frac{C_{\alpha,\beta}}{n^{\beta-\alpha}}\;,\tag{7.20}$$

for $\tau\geq 0$ and $n=2,3,\ldots$.

Proof. Let $T(\sigma) := e^{-\sigma\mathcal{B}}e^{-\sigma\mathcal{K}_0}$ and $U(\sigma) := e^{-\sigma\mathcal{K}}$, $\sigma \geq 0$. Then the following identity holds

$$\begin{aligned} T(\sigma)^n - U(\sigma)^n &= \sum_{m=0}^{n-1} T(\sigma)^{n-m-1}(T(\sigma) - U(\sigma))U(\sigma)^m \\ &= T(\sigma)^{n-1}(T(\sigma) - U(\sigma)) + (T(\sigma) - U(\sigma))U(\sigma)^{n-1} + \\ &\quad + \sum_{m=1}^{n-2} T(\sigma)^{n-m-1}(T(\sigma) - U(\sigma))U(\sigma)^m \\ &= T(\sigma)^{n-1}\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}(T(\sigma) - U(\sigma)) + (T(\sigma) - U(\sigma))\mathcal{A}^{-\alpha}\mathcal{A}^{\alpha}U(\sigma)^{n-1} + \\ &\quad + \sum_{m=1}^{n-2} T(\sigma)^{n-m-1}\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}(T(\sigma) - U(\sigma))\mathcal{A}^{-\beta}\mathcal{A}^{\beta}U(\sigma)^m \ . \end{aligned}$$

It easily yields the inequality

$$\begin{aligned} &\|T(\sigma)^n - U(\sigma)^n\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \\ &\leq \|T(\sigma)^{n-1}(T(\sigma) - U(\sigma))\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} + \|(T(\sigma) - U(\sigma))U(\sigma)^{n-1}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} + \\ &\quad + \sum_{m=1}^{n-2} \|T(\sigma)^{n-m-1}(T(\sigma) - U(\sigma))U(\sigma)^m\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \\ &\leq \|\overline{T(\sigma)^{n-1}\mathcal{A}}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \, \|A^{-1}(T(\sigma) - U(\sigma))\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} + \\ &\quad + \|(T(\sigma) - U(\sigma))\mathcal{A}^{-\alpha}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \, \|\mathcal{A}^{\alpha}U(\sigma)^{n-1}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} + \\ &\quad + \sum_{m=1}^{n-2} \|\overline{T(\sigma)^{n-m-1}\mathcal{A}}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \, \|\mathcal{A}^{-1}(T(\sigma) - U(\sigma))\mathcal{A}^{-\beta}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \times \\ &\quad \times \|\mathcal{A}^{\beta}U(\sigma)^m\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \ . \end{aligned}$$

From Lemma 7.5 we get for $\sigma \in (0, \tau]$ and $n \geq 2$ the estimates

$$\|\overline{T(\sigma)^{n-1}\mathcal{A}}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \leq \frac{c_1}{\sigma^{\alpha}} + \frac{c_2}{(n-1)\sigma} \ . \tag{7.21}$$

Now, from Lemma 7.6 we find that

$$\|\mathcal{A}^{-1}(T(\sigma) - U(\sigma))\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \leq c\,\sigma \quad \text{and} \quad \|(T(\sigma) - U(\sigma))\mathcal{A}^{-\alpha}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \leq c\,\sigma \ .$$

This implies that

$$\|\overline{T(\sigma)^{n-1}\mathcal{A}}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \, \|\mathcal{A}^{-1}(T(\sigma) - U(\sigma))\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \leq c_1 c\,\sigma^{1-\alpha} + \frac{c_2\,c}{n-1} \ ,$$

and

$$\|(T(\sigma) - U(\sigma))\mathcal{A}^{-\alpha}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \, \|\mathcal{A}^{\alpha}U(\sigma)^{n-1}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \leq \frac{c\,\Lambda_{\alpha}}{(n-1)^{\alpha}} \, \sigma^{1-\alpha} \ ,$$

where we used also Lemma 7.4, (7.2). Since by Lemma 7.7

$$\|\mathcal{A}^{-1}(T(\sigma)-e^{-\sigma\mathcal{K}})\mathcal{A}^{-\beta}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \le Z(\beta)\,\sigma^{1+\beta}\ , \quad \tau\in[0,\tau_0)\ ,$$

one gets

$$\begin{aligned}\|\overline{T(\sigma)^{n-m-1}\mathcal{A}}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))}\ \|\mathcal{A}^{-1}(T(\sigma)-U(\sigma))\mathcal{A}^{-\beta}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))}\ \|\mathcal{A}^{\beta}U(\sigma)^m\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))}\\ \le c_1\,Z(\beta)\,\Lambda_\beta\frac{\sigma^{1-\alpha}}{m^\beta}+c_2\,Z(\beta)\,\Lambda_\beta\frac{1}{(n-1-m)\,m^\beta}\ .\end{aligned}$$

This yields the following inequalities:

$$\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{n-2}\|\overline{T(\sigma)^{n-m-1}\mathcal{A}}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))}\ \|\mathcal{A}^{-1}(T(\sigma)-U(\sigma))\mathcal{A}^{-\beta}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))}\ \|\mathcal{A}^{\beta}U(\sigma)^m\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))}\\ &\quad\le c_1\,Z(\beta)\,\Lambda_\beta\,\sigma^{1-\alpha}\sum_{m=1}^{n-2}\frac{1}{m^\beta}+c_2\,Z(\beta)\,\Lambda_\beta\sum_{m=1}^{n-2}\frac{1}{(n-1-m)\,m^\beta}\\ &\quad\le\frac{c_1\,Z(\beta)\,\Lambda_\beta}{1-\beta}(n-1)^{1-\beta}\sigma^{1-\alpha}+\frac{2c_2\,Z(\beta)\,\Lambda_\beta}{1-\beta}\frac{1}{(n-1)^\beta}+c_2\,Z(\beta)\,\Lambda_\beta\frac{\ln(n-1)}{(n-1)^\beta}.\end{aligned}$$

Summarising all these ingredients one gets the estimate

$$\begin{aligned}&\|T(\sigma)^n-U(\sigma)^n\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))}\\ &\le c_1 c\,\sigma^{1-\alpha}+\frac{c_2\,c}{n-1}+\frac{c\,\Lambda_\alpha}{(n-1)^\alpha}\ \sigma^{1-\alpha}\\ &\quad+\frac{c_1\,Z(\beta)\,\Lambda_\beta}{1-\beta}(n-1)^{1-\beta}\sigma^{1-\alpha}+\frac{2c_2\,Z(\beta)\,\Lambda_\beta}{1-\beta}\frac{1}{(n-1)^\beta}+c_2\,Z(\beta)\,\Lambda_\beta\frac{\ln(n-1)}{(n-1)^\beta}\ .\end{aligned}$$

If we set $\sigma:=\tau/n$, then

$$\begin{aligned}&\|T(\tau/n)^n-U(\tau/n)^n\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))}\\ &\le\frac{c_1 c\,T^{1-\alpha}}{(n-1)^{1-\alpha}}+\frac{c_2\,c}{n-1}+\frac{c\,\Lambda_\alpha\,T^{1-\alpha}}{(n-1)}\\ &\quad+\frac{c_1\,Z(\beta)\,\Lambda_\beta\,T^{1-\alpha}}{1-\beta}\frac{1}{(n-1)^{\beta-\alpha}}+\frac{2c_2\,Z(\beta)\,\Lambda_\beta}{1-\beta}\frac{1}{(n-1)^\beta}+c_2\,Z(\beta)\,\Lambda_\beta\frac{\ln(n-1)}{(n-1)^\beta}.\end{aligned}$$

for $\tau\ge 0$ and $n=2,3,\ldots$. Hence, there exists a constant $C_{\alpha,\beta}>0$ such that (7.20) holds. □

Corollary 7.9. Let the assumptions of Theorem 7.8 be satisfied. If $\beta=1$, then for each $\gamma\in(\alpha,1)$ there exists a constant $C_{\alpha,\gamma}>0$ such that

$$\|(e^{-\tau\mathcal{B}/n}e^{-\tau\mathcal{K}_0/n})^n-e^{-\tau\mathcal{K}}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))}\le\frac{C_{\alpha,\gamma}}{n^{\gamma-\alpha}}\ , \tag{7.22}$$

for $\tau\ge 0$ and $n=2,3,\ldots$.

The proof follows immediately from Theorem 7.8. Note that in [17, Theorem 5.4] we proved in a similar setup that the convergence rate has estimate $O(n^{-(1-\alpha)})$, $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$. This is slightly sharper than (7.22).

Remark 7.10.

(i) It is worth to note that our result depends only on the exponent α for domains of operators A and $B(t)$ and not on their particular details.

(ii) Until now, error estimates in operator-norm for the Trotter product formula on *Banach spaces* for the time-independent case is proven only under the assumption that at least one of the involved operators is generator of a holomorphic contraction semigroup, see [5]. Since the right-shift semigroup (Section 3.1) is nilpotent, it can never be holomorphic. Therefore, although motivated by [5], the Theorem 7.8 is the first result, where this assumption is dropped.

(iii) If the family of generators is independent of $t \in \mathcal{I}$, i.e. $B(t) = B$, then condition (A6) is automatically satisfied for any $\beta \geq 0$. In particular, we can set $\beta = 1$. Since $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ commute with D_0 we get

$$(e^{-\tau\mathcal{B}/n}e^{-\tau\mathcal{K}_0/n})^n = (e^{-\tau\mathcal{B}/n}e^{-\tau\mathcal{A}/n})^n e^{-\tau D_0}, \quad \tau \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7.23}$$

Now we comment that if one of the operators: A or B, is generator of a holomorphic contraction semigroup and another one of a contraction semigroup on a Banach space X, then from Theorem 3.6 of [5] we get the existence of constants $b_1 > 0$, $b_2 > 0$ and $\eta > 0$ such that the estimate

$$\|(e^{-\tau B/n}e^{-\tau A/n})^n - e^{-\tau C}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq (b_1 + b_2\tau^{1-\alpha})e^{\tau\eta}\,\frac{\ln(n)}{n^{1-\alpha}}\ ,$$

holds for $\tau \geq 0$ and $n \in \mathbb{N}$. Applying this result to (7.23) we immediately obtain the existence of a constant $R > 0$ such that

$$\|(e^{-\tau\mathcal{B}/n}e^{-\tau\mathcal{K}_0/n})^n - e^{-\tau\mathcal{K}}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \leq R\,\frac{\ln(n)}{n^{1-\alpha}}\ ,$$

is valid for $\tau \geq 0$ and $n \in \mathbb{N}$. Note that this estimate is sharper than the estimate in (7.22).

(iv) Let us reinforce assumption (A5).

(A5') There is a $\theta \in (0,1)$ such that $\mathrm{dom}(B(t)^*) \supseteq \mathrm{dom}((A^\theta)^*)$ holds for a.e. $t \in \mathcal{I}$ and

$$C^*_\theta := \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathcal{I}} \|B(t)^*(A^{-\theta})^*\|_{\mathscr{L}(X^*)} < \infty.$$

Notice assumption (A5') yields assumption (A5). Under the assumptions of Theorem 7.8 and assumption (A5') there are constants $C'_{\alpha,\beta} > 0$ and $C''_{\alpha,\beta} > 0$ such that the estimates

$$\|(e^{-\tau\mathcal{K}_0/n}e^{-\tau\mathcal{B}/n})^n - e^{-\tau\mathcal{K}}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \leq \frac{C'_{\alpha,\beta}}{n^{\beta-\alpha}}\ , \tag{7.24}$$

and

$$\|(e^{-\tau\mathcal{K}_0/2n}e^{-\tau\mathcal{B}/n}e^{-\tau\mathcal{K}_0/2n})^n - e^{-\tau\mathcal{K}}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} \leq \frac{C''_{\alpha,\beta}}{n^{\beta-\alpha}}\ , \tag{7.25}$$

are valid for $\tau \geq 0$ and $n = 2, 3, \dots$.

7.3. Norm convergence for propagators

We investigate here the consequences of Theorem 7.8 for convergence of the approximants, $\{U_n(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$, $n \in \mathbb{N}$, (1.6), to the propagator $\{U(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$, which solves the nACP (1.3).

Recall that by (6.1) one gets the relation

$$\begin{aligned}(\{(e^{-\frac{\tau}{n}\mathcal{B}}e^{-\frac{\tau}{n}\mathcal{K}_0})^n - e^{-\tau(\mathcal{B}+\mathcal{K}_0)}\}f)(t) &= \\ &= \{U_n(t,t-\tau) - U(t,t-\tau)\}\chi_{\mathcal{I}}(t-\tau)f(t-\tau)\ ,\end{aligned} \tag{7.26}$$

for $(t, t-\tau) \in \Delta$ and $f \in L^p(\mathcal{I}, X)$, where the Trotter product approximation for propagator $U(t,s)$ has the form

$$U_n(t,s) := \overrightarrow{\prod_{j=1}^{n}} e^{-\frac{t-s}{n}B(s+(n-j+1)\frac{t-s}{n})}e^{-\frac{t-s}{n}A}, \quad (t,s) \in \Delta\ .$$

is increasingly ordered from the left to the right.

Theorem 7.11. Let the assumptions (A1), (A3), (A4), (A5), and (A6) be satisfied. If the family of generators $\{B(t)\}_{t\in\mathcal{I}}$ is stable with respect to A and $\beta \in (\alpha, 1)$, then there exists a constant $C_{\alpha,\beta} > 0$ such that

$$\operatorname*{ess\,sup}_{(t,s)\in\Delta} \|U_n(t,s) - U(t,s)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{C_{\alpha,\beta}}{n^{\beta-\alpha}}, \quad n = 2, 3, \dots\ . \tag{7.27}$$

The constant $C_{\alpha,\beta}$ coincides with that in the estimate (7.20) of Theorem 7.8.

Proof. We set

$$S_n(t,s) := U_n(t,s) - U(t,s), \quad (t,s) \in \Delta, \quad n \in \mathbb{N}\ ,$$

and

$$\mathcal{S}_n(\tau) := L(\tau)\{(e^{-\frac{\tau}{n}\mathcal{B}}e^{-\frac{\tau}{n}\mathcal{K}_0})^n - e^{-\tau(\mathcal{B}+\mathcal{K}_0)}\} : L^p(\mathcal{I},X) \to L^p(\mathcal{I},X)\ ,$$

for $\tau \geq 0$ and $n = 2, 3, \dots$. Here $L(\tau)$, $\tau \geq 0$, is the left-shift semigroup (5.5). Then by (7.26) we get

$$(\mathcal{S}_n(\tau)g)(t) = S_n(t+\tau,t)\chi_{\mathcal{I}}(t+\tau)g(t), \quad t \in \mathcal{I}_0, \quad g \in L^p(\mathcal{I},X). \tag{7.28}$$

Hence, for any $\tau \in \mathcal{I}$ and $n \in \mathbb{N}$, the operator $\mathcal{S}_n^\tau$ is a multiplication operator on $L^p(\mathcal{I}, X)$ induced by the family $\{S_n(t+\tau, t)\chi_{\mathcal{I}}(t+\tau)\}_{t\in\mathcal{I}}$ of bounded operators. Applying first (5.6) and then Proposition 2.11 for (7.28), one gets for $\tau \geq 0$ the equality

$$\begin{aligned}
&\|(e^{-\frac{\tau}{n}\mathcal{B}}e^{-\frac{\tau}{n}\mathcal{K}_0})^n - e^{-\tau(\mathcal{B}+\mathcal{K}_0)}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} = \qquad (7.29)\\
&= \|L(\tau)\{(e^{-\frac{\tau}{n}\mathcal{B}}e^{-\frac{\tau}{n}\mathcal{K}_0})^n - e^{-\tau(\mathcal{B}+\mathcal{K}_0)}\}\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))}\\
&= \|\mathcal{S}_n(\tau)\|_{\mathscr{L}(L^p(\mathcal{I},X))} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathcal{I}_0}\|S_n(t+\tau,t)\chi_{\mathcal{I}}(t+\tau)\|_{\mathscr{L}(X)}\\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathcal{I}_0}\|\{U_n(t+\tau,t) - U(t+\tau,t)\}\chi_{\mathcal{I}}(t+\tau)\|_{\mathscr{L}(X)}\\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T-\tau]}\|U_n(t+\tau,t) - U(t+\tau,t)\|_{\mathscr{L}(X)}\ .
\end{aligned}$$

Now taking into account Theorem 7.8 we find

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T-\tau]}\|U_n(t+\tau,t) - U(t+\tau,t)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{C_{\alpha,\beta}}{n^{\beta-\alpha}}, \quad \tau \geq 0, \quad n \in 2,3,\ldots\ ,$$

which yields (7.27). □

Remark 7.12.

(i) The equality (7.29) shows that estimates (7.20) and (7.27) are equivalent.

(ii) We note that *a priori* for a fixed $n \in \mathbb{N}$ the operator family $\{U_n(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ do not define a propagator since the *co-cycle equation* is, in general, not satisfied. But one can check that

$$U_n(t,s) = U_{n-k}\left(t, s + \frac{k}{n}(t-s)\right)U_k\left(s + \frac{k}{n}(t-s), s\right),$$

is satisfied for $0 < s \leq t \leq T$, $n \in \mathbb{N}$ and any $k \in \{0,1,\ldots,n\}$.

(iii) Using (7.24) one can prove that the estimate

$$\operatorname*{ess\,sup}_{(t,s)\in\Delta}\|U_n'(t,s) - U(t,s)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{C'_{\alpha,\beta}}{n^{\beta-\alpha}}, \quad n = 2,3,\ldots\ .$$

holds where $\{U_n'(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ is given by (6.2).

From (7.25) we get

$$\operatorname*{ess\,sup}_{(t,s)\in\Delta}\|U_n''(t,s) - U(t,s)\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \frac{C''_{\alpha,\beta}}{n^{\beta-\alpha}}, \quad n = 2,3,\ldots\ .$$

where $\{U_n''(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ is given by

$$\begin{aligned}
U_n''(t,s) &:= \prod_{j=1}^{n-1\leftarrow} G_j''(t,s;n), \quad n = 1,2,\ldots\ ,\\
G_j''(t,s;n) &:= e^{-\frac{t-s}{2n}A}e^{-\frac{t-s}{n}B(s+(j+\frac{1}{2})\frac{t-s}{n})}e^{-\frac{t-s}{2n}A}, \quad j = 0,1,2,\ldots,n-1\,,
\end{aligned}$$

$(t,s) \in \Delta$, with increasingly ordered product in j from the left to the right.

8. Example: Diffusion equation perturbed by a time-dependent potential

Here we investigate a non-autonomous problem when diffusion equation is perturbed by a time-dependent potential. To this aim consider the Banach space $X = L^q(\Omega)$, where $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, is a bounded domain with C^2-boundary and $q \in (1, \infty)$. Then the equation for the nACP reads as

$$\dot{u}(t) = \Delta u(t) - B(t)u(t), \quad u(s) = u_s \in L^q(\Omega), \quad t, s \in \mathcal{I}_0 \ , \tag{8.1}$$

where Δ denotes the Laplace operator in $L^q(\Omega)$ with Dirichlet boundary conditions defined by the mapping

$$\Delta : \mathrm{dom}(\Delta) = H^2_q(\Omega) \cap \mathring{H}^1_q(\Omega) \to L^q(\Omega).$$

Then operator $-\Delta$ is the generator of a holomorphic contraction semigroup on $L^q(\Omega)$, [21, Theorem 7.3.5/6], and $0 \in \varrho(A)$, see (A1).

Now, let $B(t)$ denote a time-dependent scalar-valued multiplication operator given by

$$(B(t)f)(x) = V(t,x)f(x), \quad \mathrm{dom}(B(t)) = \{f \in L^q(\Omega) : V(t,x)f(x) \in L^q(\Omega)\} \ ,$$

where

$$V : \mathcal{I} \times \Omega \to \mathbb{C}, \quad V(t, \cdot) \in L^\varrho(\Omega) \ .$$

For any $\alpha \in (0,1)$, the fractional power of operator $-\Delta$ is defined on the domain $\mathring{H}^{2\alpha}_q(\Omega)$ by

$$(-\Delta)^\alpha : \mathring{H}^{2\alpha}_q(\Omega) \to L^q(\Omega).$$

Note, that for $2\alpha < 1/q$, it holds that $\mathring{H}^{2\alpha}_q(\Omega) = H^{2\alpha}_q(\Omega)$. The operator Δ^* is dual to Δ and it is defined on domain

$$\mathrm{dom}(\Delta^*) = H^2_{q'}(\Omega) \cap \mathring{H}^1_{q'}(\Omega) \subset L^{q'}(\Omega) \ ,$$

where $1/q + 1/q' = 1$. Since operators $B(t)$ are scalar-valued, one gets that the dual $B(t)^* = \overline{B(t)} : \mathrm{dom}(B(t)) \subset L^{q'}(\Omega) \to L^{q'}(\Omega)$.

Remark 8.1. Note that the operator $A = -\Delta$ with Dirichlet boundary conditions in $L^p(\Omega)$, $p \in (1, \infty)$, fulfills the *maximal parabolic regularity* condition, see [2]. In particular this means that $\widetilde{\mathcal{K}_0} = D_0 + \mathcal{A}$ is closed and hence coincides with its closure: $\widetilde{\mathcal{K}_0} = \mathcal{K}_0$.

To prove the existence and uniqueness of solution of the nACP (8.1) and in order to construct the product approximants for this solution, we have to verify the assumptions

(A1) - (A6), see §1. In particular, we have to determine the required regularity of $V(t,\cdot) \in L^{\varrho}(\Omega)$ to ensure that assumptions (A3) and (A5):

$$\mathrm{dom}((-\Delta)^{\alpha}) \subset \mathrm{dom}(B(t)) \quad \text{and} \quad \mathrm{dom}(\Delta^{*}) \subset \mathrm{dom}(B(t)^{*} ,$$

or in other words that

$$H_q^{2\alpha}(\Omega), H_{q'}^{2}(\Omega) \subset \mathrm{dom}(B(t)) , \tag{8.2}$$

are valid. Note, that supposing (A3) the assumption (A2) is always satisfied for our case of scalar measurable potentials.

Using the Sobolev embedding theory, one obtains a general description of the embeddings

$$H_{\gamma_1}^{s}(\Omega) \subset L^{\gamma_2}(\Omega) \ \text{ for } \begin{cases} \gamma_2 \in [\gamma_1, \frac{d\gamma_1/s}{d/s-\gamma_1}], \text{ if } \gamma_1 \in (1, d/s) \\ \gamma_2 \in [\gamma_1, \infty), \text{ if } \gamma_1 \in [d/s, \infty) \end{cases} . \tag{8.3}$$

For our case (8.2), we obtain $H_q^{2\alpha}(\Omega) \subset L^{r}(\Omega)$ and $H_{q'}^{2}(\Omega) \subset L^{\rho}(\Omega)$, for some constants $r, \rho \in (1,\infty]$. Hence, it suffices to ensure $L^{r}(\Omega), L^{\rho}(\Omega) \subset \mathrm{dom}(B(t))$. The parameters r, ρ define $\tilde{r}, \tilde{\rho}$ via

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{\tilde{r}} = \frac{1}{q}, \quad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\tilde{\rho}} = \frac{1}{q'} , \tag{8.4}$$

and since the operator $B(t)$ is a multiplication operator defined by $V(t,\cdot)$, the regularity of $V(t,\cdot)$ has to be at least as

$$\varrho = \max\{\tilde{r}, \tilde{\rho}\} .$$

Then the *existence* Theorem 4.5 yields the following statement:

Theorem 8.2. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^{d}$ be a bounded domain with C^{2}- boundary, let $q \in (1,\infty)$ and let $\alpha \in (0,1)$. Let $B(t)f = V(t,\cdot)f$ define a scalar valued multiplication operator on $L^{q}(\Omega)$ with $V \in L^{\infty}(\mathcal{I}, L^{\tilde{r}}(\Omega))$. Let $\tilde{r} \in (1,\infty)$ be chosen from the above tables. Then, the nACP (8.1) has a unique solution operator (propagator).

Proof. Using relation (8.4) and the Sobolev embeddings (8.3), one gets that $\mathrm{dom}((-\Delta)^{\alpha}) \subset \mathrm{dom}(B(t))$, i.e. the assumption (A3) holds. Therefore, summarising our observations above we see that conditions (A1)-(A3) of Theorem 4.5 are fulfilled and, consequently, it yields the proof. □

Remark 8.3. Note that in [24], the existence of solution operator for equation (8.1) is shown assuming weaker regularity in space and time for the potential $V(t,x)$. Our assumption (A3) of the uniform boundedness of the norm $\|B(t)(-\Delta)^{\alpha}\|_{\mathscr{L}(X)}$, is indeed too strong, but important for further consideration.

Now, we study the convergence of the Trotter product approximants of the solution operator. We assume that the real part of potential $V(t,x)$ is positive:

$$\mathrm{Re}(V(t,x)) \geq 0, \quad \text{for a.e. } (t,x) \in \mathcal{I} \times \Omega \ .$$

Then, for any $t \in \mathcal{I}$ the operator $V(t,\cdot)$ is a generator of a contraction semigroup on $X = L^q(\Omega)$ ([7, Theorem I.4.11-12]). Moreover, the assumption (A4) is satisfied.

Assuming $V \in L^\infty(\mathcal{I}, L^\varrho(\Omega))$, we find that $\mathrm{dom}((-\Delta)^\alpha) \subset \mathrm{dom}(B(t))$ (assumption (A3)) and $\mathrm{dom}(\Delta^*) \subset \mathrm{dom}(B(t)^*)$ (assumption (A5)).

To proceed with sufficient conditions for assumption (A6) we define the operator-valued function:

$$F(t) := (-\Delta)^{-1} B(t) (-\Delta)^{-\alpha} : L^q(\Omega) \to H^2_q(\Omega) \cap \mathring{H}^1_q(\Omega) \subset L^q(\Omega).$$

Let $f \in L^q(\Omega)$ and $g \in L^{q'}(\Omega)$, where $1/q + 1/q' = 1$. Let also $\widetilde{f} := \Delta^{-\alpha} f \in \mathring{H}^{2\alpha}_q(\Omega) \subset L^r(\Omega)$ and $\widetilde{g} := (\Delta^{-1})^* g = (\Delta^*)^{-1} g \in H^2_{q'}(\Omega) \cap \mathring{H}^1_{q'}(\Omega) \subset L^\rho(\Omega)$, where r and ρ are defined in (8.4). Then, we get for $t \in \mathcal{I}$

$$\begin{aligned}\langle F(t) f, g\rangle &= \langle (-\Delta)^{-1} B(t) (-\Delta)^{-\alpha} f, g\rangle = \\ &= \langle (-\Delta)^{-\alpha} f, B(t)^* (-\Delta^*)^{-1} g\rangle = \langle \tilde{f}, B(t)^* \tilde{g}\rangle \ .\end{aligned}$$

The boundedness of $\langle \widetilde{f}, B(t)^* \widetilde{g}\rangle$ is ensured if $V(t,\cdot) \in L^\tau(\Omega)$, where $\tau \in (1,\infty)$ is defined by relation

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\rho} = 1. \tag{8.5}$$

Since (8.4) implies $r \geq q$, it holds that $\tau \leq \widetilde{\rho}$ and hence, $\tau \leq \varrho = \max\{\widetilde{r}, \tilde{\rho}\}$. Therefore, the operators $F(t)$ are bounded for potentials $V(t,\cdot) \in L^\tau(\Omega)$. If in addition V is β-continuous: $V \in C^\beta(\mathcal{I}, L^\tau(\Omega))$ for $\beta \in (\alpha, 1)$, then this potential ensures the assumption (A6).

We are now able to estimate the product approximation of solution operator for the nACP problem (8.1).

Theorem 8.4. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ be a bounded domain with C^2- boundary, let $q \in (1,\infty)$, $\alpha \in (0,1)$ and $\beta \in (\alpha, 1)$. Choose $\varrho, \tau \in (1,\infty)$. Let $B(t) f = V(t,\cdot) f$ define a scalar-valued multiplication operator in $L^q(\Omega)$ with

$$V \in L^\infty(\mathcal{I}, L^\varrho(\Omega)) \cap C^\beta(\mathcal{I}, L^\tau(\Omega)).$$

Moreover, let $\mathrm{Re}(V(t,x)) \geq 0$ for $t \in \mathcal{I}$ and for a.e. $x \in \Omega$.

Then, the solution operator $U(t,s)$ of the nACP problem (8.1) can be approximated in the operator-norm topology with the error bound estimate:

$$\sup\nolimits_{(t,s)\in\Delta} \| U_n(t,s) - U(t,s) \|_{\mathscr{L}(L^q(\Omega))} = O(n^{-(\beta-\alpha)}) \ ,$$

by the Trotter product approximants:

$$U_n(t,s) = \overrightarrow{\prod_{j=1}^{n}} e^{-\frac{t-s}{n} V(\frac{n-j+1}{n} t + \frac{j-1}{n} s, \cdot)} e^{\frac{t-s}{n}\Delta} \ . \tag{8.6}$$

Proof. Note that for the couple of operators Δ and $B(t)$ from (8.1) the assumptions (A1)-(A6) are fulfilled. The stability condition is also satisfied, since we deal with generators of contraction semigroups. The $\operatorname{ess\,sup}$ becomes indeed a sup since we have continuous time-dependence for propagator's approximants. Therefore, the claim follows by virtue of Theorem 7.11. $\square$

We conclude this section by a number of remarks.

Remark 8.5.

(i) We focused on domains, which are compact and have C^2-boundaries. Our arguments can be extended to a more general domains.

(ii) Although the propagator approximants $\{U_n(t,s)\}_{(t,s)\in\Delta}$ defined in (8.6) looks elaborate, they have a simple structure. The semigroup in $L^q(\mathbb{R}^d)$ generated by the Laplace operator is given by the Gauss-Weierstrass semigroup (see for example [7, Chapter II,2.13]) defined via

$$(e^{t\Delta}u)(x) = (T(t)u)(x) = (4\pi t)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} dy\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}u(y) \ .$$

The factors $e^{-\tau V(t_j)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, in the product approximant (8.6) are scalar valued and can be easily computed.

(iii) In [3], see Theorem 5.2 , the authors proved for the same approximation (called there the sequential splitting procedure) a *vector-dependent* convergence rate on a subspace in $L^q(\mathbb{R}^d)$, where the potential V is bounded and its commutator with Laplacian verifies a supplementary *commutator* condition.

Acknowledgements

This survey of results on the product approximation of solution operators for non-autonomous Cauchy problems was motivated by my lecture: *Solution of non-autonomous Cauchy problem in normed spaces*. The lecture was presented at the conference "Equation of Convolution Type in Science and Technology", 25-28 September 2019, Yalta – Miskhor, Russian Federation.

I am very grateful to organisers for invitation and for warm hospitality.

References

1. *P. Aquistapace and B. Terreni.* A unified approach to abstract linear nonautonomous parabolic equations. *Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova*, tome 78, 47-107, 1987.
2. *W. Arendt, R. Chill, S. Fornaro, and C. Poupaud.* L^p-maximal regularity for non-autonomous evolution equations. *J. Differential Equations*, 237(1):1–26, 2007.
3. *A. Bátkai, P. Csomós, B. Farkas, and G. Nickel.* Operator splitting for non-autonomous evolution equations. *Journal of Functional Analysis*, 260: 2163–2190, 2011.

4. *A. Bátkai and E. Sikolya.* The norm convergence of a Magnus expansion method. *Cent. Eur. J. Math*, 10(1): 150-158, 2012.
5. *V. Cachia and V. A. Zagrebnov.* Operator-norm convergence of the Trotter product formula for holomorphic semigroups. *J. Operator Theory*, 46 : 199–213, 2001.
6. *P. Cembranos and J. Mendoza. Banach spaces of vector-valued functions*, volume 1676 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
7. *K.-J. Engel and R. Nagel. One-parameter semigroups for linear evolution equations.* Springer-Verlag, New York, 2000.
8. *D. E. Evans.* Time dependent perturbations and scattering of strongly continuous groups on Banach spaces. *Math. Ann.*, 221(3): 275–290, 1976.
9. *J. Howland.* Stationary scattering theory for time-dependent Hamiltonians. *Math. Ann.*, 207: 315–335, 1974.
10. *J. K. Hunter and B. Nachtergaele. Applied Analysis.* World Scientific Publishing Co., Singapore, 2001.
11. *T. Ichinose and H. Tamura.* Error estimate in operator norm of exponential product formulas for propagators of parabolic evolution equations. *Osaka J. Math.*, 35(4):751–770, 1998.
12. *T. Kato.* Integration of the equation of evolution in a Banach space. *J. Math. Soc. Japan*, 5:208–234, 1953.
13. *T. Kato.* Linear evolution equations of “hyperbolic” type. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I*, 17:241–258, 1970.
14. *T. Kato.* Linear evolution equations of “hyperbolic” type. II. *J. Math. Soc. Japan*, 25:648–666, 1973.
15. *T. Kato. Perturbation theory for linear operators.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
16. *H. Neidhardt.* On abstract linear evolution equations. I. *Math. Nachr.*, 103:283–298, 1981.
17. *H. Neidhardt, A. Stephan and V. A. Zagrebnov.* On convergence rate estimates for approximations of solution operators for linear non-autonomous evolution equations. *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, 8(2): 201—215, 2017.
18. *H. Neidhardt and V. A. Zagrebnov.* On Error Estimates for the Trotter–Kato Product Formula. *Letters in Mathematical Physics*, 44: 169—186, 1998.
19. *H. Neidhardt and V. A. Zagrebnov.* Linear non-autonomous Cauchy problems and evolution semigroups. *Adv. Differential Equations*, 14(3-4):289–340, 2009.
20. *G. Nickel.* On evolution semigroups and nonautonomous Cauchy problems. *Diss. Summ. Math.*, 1(1-2):195–202, 1996.
21. *A. Pazy. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer-Verlag, New York, 1983.
22. *R. S. Phillips.* Perturbation theory for semi-groups of linear operators. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 74:199–221, 1953.
23. *G. da Prato and P. Grisvard.* Maximal Regularity for Evolution Equations by Interpolation and Extrapolation. *Journal of Functional Analysis*, 58: 107-124, 1984.
24. *J. Prüss and R. Schnaubelt.* Solvability and maximal regularity of parabolic evolution equations with coefficients continuous in time. *J. Math. Anal. Appl.*, 256(2):405–430, 2001.

25. *M. Reed and B. Simon. Methods of modern mathematical physics, II: Fourier-analysis, self-adjointness.* Academic Press, New York, 1975.
26. *H. Tanabe. Equations of evolution.* Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass.-London, 1979.
27. *H. F. Trotter.* On the product of semi-groups of operators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10:545–551, 1959.
28. *J. Voigt.* On the perturbation theory for strongly continuous semigroups. *Math. Ann.*, 229(2):163–171, 1977.
29. *P.-A. Vuillermot, W.F. Wreszinski, and V. A. Zagrebnov.* A Trotter-Kato product formula for a class of non-autonomous evolution equations. *Nonlinear Analysis*, 69: 1067—1072, 2008.
30. *P.-A. Vuillermot, W.F. Wreszinski, and V. A. Zagrebnov.* A general Trotter-Kato formula for a class of evolution operators. *J. Funct. Anal.* 257: 2246—2290, 2009.
31. *V.A. Zagrebnov*, *Topics in the Theory of Gibbs Semigroups*, KU Leuven University Press, Leuven 2003.
32. *V. A. Zagrebnov*, *Gibbs Semigroups*, Operator Theory Series: Advances and Applications, Vol. 273, Bikhäuser - Springer, Basel 2019.

Получена 01.11.2019

Динамические системы, 2019, том 9(37), №4, 367–389

УДК 517.929.4

Асимптотические свойства решений в модели хищник-жертва с двумя запаздываниями[1]

М. А. Скворцова

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет,
Новосибирск 630090. *E-mail: sm-18-nsu@yandex.ru*

Аннотация. Рассматривается система дифференциальных уравнений с двумя запаздываниями, описывающая взаимодействие популяций хищников и жертв. Модель учитывает возрастную структуру популяций, при этом параметры запаздывания отвечают за время взросления хищников и жертв соответственно. В работе изучаются асимптотические свойства решений рассматриваемой системы. Указано множество начальных вектор-функций, при которых решения сходятся к положению равновесия, соответствующему совместному сосуществованию популяций хищников и жертв. Установлены оценки решений, характеризующие скорость стабилизации на бесконечности к данному положению равновесия. Результаты получены с использованием модифицированных функционалов Ляпунова – Красовского.

Ключевые слова: модель хищник-жертва, уравнения с запаздывающим аргументом, асимптотическая устойчивость, оценки решений, множество притяжения, модифицированные функционалы Ляпунова – Красовского.

Asymptotic properties of solutions in a predator-prey model with two delays

M. A. Skvortsova
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS,
Novosibirsk State University,
Novosibirsk 630090.

Abstract. We consider a system of differential equations with two delays, which describes the interaction between predator and prey populations. The model takes into account the age structure of populations, herewith the delay parameters denote the time that predator and prey individuals need to become adult. In the paper we study asymptotic properties of solutions to the considered system. We describe a set of initial vector-functions, for which solutions converge to the equilibrium point corresponding to the coexistence of predator and prey populations. We establish estimates of solutions characterizing the rate of stabilization at infinity to this equilibrium point. The results are obtained using modified Lyapunov–Krasovskii functionals.
Keywords: predator-prey model, delay differential equations, asymptotic stability, estimates of solutions, attraction set, modified Lyapunov–Krasovskii functionals.

---

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-31-00408).

MSC 2010: 34K20, 34K25, 92D25

1. Введение

Настоящая работа является продолжением исследований асимптотических свойств решений системы дифференциальных уравнений с двумя запаздываниями, описывающей взаимодействие популяций хищников и жертв [20]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = rx(t-\tau_1)e^{-c_1\tau_1} - ax^2(t) - d_1x(t) - f(x(t),y(t)), \\ \dot{u}(t) = rx(t) - rx(t-\tau_1)e^{-c_1\tau_1} - c_1u(t), \\ \dot{y}(t) = nf(x(t-\tau_2),y(t-\tau_2))e^{-c_2\tau_2} - d_2y(t), \\ \dot{v}(t) = nf(x(t),y(t)) - nf(x(t-\tau_2),y(t-\tau_2))e^{-c_2\tau_2} - c_2v(t), \end{cases} \tag{1.1}$$

$$f(x,y) = \frac{bxy}{1+k_1x+k_2y}, \quad b>0, \quad k_1,k_2 \geq 0.$$

Здесь $x(t)$ — численность популяции взрослых жертв, $u(t)$ — численность популяции молодых жертв, $y(t)$ — численность популяции взрослых хищников, $v(t)$ — численность популяции молодых хищников. Параметры запаздывания $\tau_1 > 0$ и $\tau_2 > 0$ отвечают за время взросления жертв и хищников соответственно. Коэффициенты системы предполагаются положительными. Более детальное описание модели содержится в [20].

Отметим, что в работе [20] также подробно обсуждались асимптотические свойства решений рассматриваемой системы. В частности, были получены условия стабилизации решений на бесконечности, а также условия асимптотической устойчивости и неустойчивости положений равновесия.

Как было отмечено в [20], в зависимости от коэффициентов система (1.1) имеет не более трех положений равновесия (с неотрицательными компонентами).

1) Если $d_1 \geq re^{-c_1\tau_1}$, то у системы существует только одно положение равновесия: $(x(t),u(t),y(t),v(t)) = (0,0,0,0)$.

2) Если $d_1 < re^{-c_1\tau_1}$ и $ad_2 \geq (re^{-c_1\tau_1} - d_1)(nbe^{-c_2\tau_2} - d_2k_1)$, то у системы существуют два положения равновесия: $(x(t),u(t),y(t),v(t)) = (0,0,0,0)$ и $(x(t),u(t),y(t),v(t)) = (x^*,u^*,0,0)$, где

$$x^* = \frac{1}{a}(re^{-c_1\tau_1} - d_1), \quad u^* = \frac{rx^*}{c_1}(1-e^{-c_1\tau_1}).$$

3) Если $d_1 < re^{-c_1\tau_1}$ и $ad_2 < (re^{-c_1\tau_1} - d_1)(nbe^{-c_2\tau_2} - d_2k_1)$, то у системы существуют три положения равновесия: $(x(t),u(t),y(t),v(t)) = (0,0,0,0)$, $(x(t),u(t),y(t),v(t)) = (x^*,u^*,0,0)$, и $(x(t),u(t),y(t),v(t)) = (x_0,u_0,y_0,v_0)$. При $k_2 \neq 0$ величина x_0 определяется по формуле

$$x_0 = \frac{1}{2}(-B + \sqrt{B^2+4C}),$$

$$B = \frac{nbe^{-c_2\tau_2} - d_2k_1}{ak_2ne^{-c_2\tau_2}} - \frac{1}{a}(re^{-c_1\tau_1} - d_1), \quad C = \frac{d_2}{ak_2ne^{-c_2\tau_2}},$$

при $k_2 = 0$

$$x_0 = \frac{d_2}{nbe^{-c_2\tau_2} - d_2 k_1}.$$

Величины u_0, y_0, v_0 определяются так:

$$u_0 = \frac{rx_0}{c_1}(1 - e^{-c_1\tau_1}),$$

$$y_0 = \frac{ne^{-c_2\tau_2}}{d_2}(re^{-c_1\tau_1} - d_1 - ax_0)x_0,$$

$$v_0 = \frac{d_2 y_0}{c_2}(e^{c_2\tau_2} - 1).$$

Положение равновесия $(0,0,0,0)$ соответствует полному вымиранию популяций, положение равновесия $(x^*, u^*, 0, 0)$ соответствует выживанию только популяции жертв, положение равновесия (x_0, u_0, y_0, v_0) соответствует совместному сосуществованию популяций жертв и хищников.

При исследовании асимптотического поведения решений важным вопросом также является получение оценок решений, характеризующих скорость стабилизации на бесконечности. Отметим, что для получения оценок решений систем с запаздыванием часто используются модифицированные функционалы Ляпунова – Красовского (см., например, [2–9], [16–19]). Для изучения свойств решений некоторых биологических моделей такой подход применялся в [10–14]. В частности, в работе [13] были установлены оценки, характеризующие скорости стабилизации решений системы (1.1) на бесконечности к положениям равновесия $(0,0,0,0)$ и $(x^*, u^*, 0, 0)$.

Цель настоящей работы — указать множество начальных вектор-функций, при которых решения системы (1.1) сходятся к положению равновесия (x_0, u_0, y_0, v_0), и получить оценки решений, характеризующие скорость стабилизации на бесконечности к данному положению равновесия. Такие оценки асимптотического поведения решений для системы (1.1) будут получены впервые. При получении результатов мы также будем использовать модифицированные функционалы Ляпунова – Красовского.

Автор выражает благодарность профессору Г. В. Демиденко за внимание к работе.

2. Построение модифицированного функционала Ляпунова – Красовского

В данном параграфе мы будем предполагать, что выполнены условия, при которых у системы (1.1) существует нетривиальное положение равновесия (x_0, u_0, y_0, v_0):

$$d_1 < re^{-c_1\tau_1}, \quad ad_2 < (re^{-c_1\tau_1} - d_1)(nbe^{-c_2\tau_2} - d_2 k_1). \tag{2.1}$$

Рассмотрим подсистему, состоящую из первого и третьего уравнений системы (1.1):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = rx(t-\tau_1)e^{-c_1\tau_1} - ax^2(t) - d_1x(t) - f(x(t),y(t)), \\ \dot{y}(t) = nf(x(t-\tau_2),y(t-\tau_2))e^{-c_2\tau_2} - d_2y(t). \end{cases} \tag{2.2}$$

В системе (2.2) сделаем замену

$$x(t) = x_0 + \widetilde{x}(t), \quad y(t) = y_0 + \widetilde{y}(t), \tag{2.3}$$

тогда получим

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{x}}(t) = re^{-c_1\tau_1}(x_0 + \widetilde{x}(t-\tau_1)) - a(x_0+\widetilde{x}(t))^2 \\ \qquad\qquad -d_1(x_0+\widetilde{x}(t)) - f(x_0+\widetilde{x}(t), y_0+\widetilde{y}(t)), \\ \\ \dot{\widetilde{y}}(t) = nf(x_0+\widetilde{x}(t-\tau_2), y_0+\widetilde{y}(t-\tau_2))e^{-c_2\tau_2} - d_2(y_0+\widetilde{y}(t)). \end{cases}$$

Кратко эту систему можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\boldsymbol{y}}(t) = A\widetilde{\boldsymbol{y}}(t) + B_1\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_1) + B_2\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2) + F_0(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)) + G(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2)), \tag{2.4}$$

где

$$\widetilde{\boldsymbol{y}}(t) = \begin{pmatrix} \widetilde{x}(t) \\ \widetilde{y}(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ 0 & -a_{22} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

$$a_{11} = 2ax_0 + d_1 + f'_x(x_0,y_0) = 2ax_0 + d_1 + \frac{by_0(1+k_2y_0)}{(1+k_1x_0+k_2y_0)^2},$$

$$a_{12} = f'_y(x_0,y_0) = \frac{bx_0(1+k_1x_0)}{(1+k_1x_0+k_2y_0)^2}, \quad a_{22} = d_2, \quad b_{11} = re^{-c_1\tau_1},$$

$$b_{21} = ne^{-c_2\tau_2}f'_x(x_0,y_0) = \frac{y_0}{x_0}\frac{d_2(1+k_2y_0)}{(1+k_1x_0+k_2y_0)},$$

$$b_{22} = ne^{-c_2\tau_2}f'_y(x_0,y_0) = \frac{d_2(1+k_1x_0)}{(1+k_1x_0+k_2y_0)},$$

$$F_0(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)) = \begin{pmatrix} -a\widetilde{x}^2(t) - h(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ ne^{-c_2\tau_2}h(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2)) \end{pmatrix},$$

$$h(\widetilde{\boldsymbol{y}}) = f(x_0+\widetilde{x}, y_0+\widetilde{y}) - f(x_0,y_0) - f'_x(x_0,y_0)\widetilde{x} - f'_y(x_0,y_0)\widetilde{y}$$

$$= \frac{b\Big[\Big(1+k_1x_0+k_2y_0+2k_1x_0k_2y_0\Big)\widetilde{x}\widetilde{y} - k_1y_0(1+k_2y_0)\widetilde{x}^2 - k_2x_0(1+k_1x_0)\widetilde{y}^2\Big]}{[1+k_1(x_0+\widetilde{x})+k_2(y_0+\widetilde{y})][1+k_1x_0+k_2y_0]^2}. \tag{2.6}$$

В работе [13] были получены достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.4), которые также являются достаточными условиями асимптотической устойчивости положения равновесия (x_0,y_0) системы (2.2). Приведем соответствующий результат.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (2.1) *и условие*

$$a_{12}b_{21} < (a_{11} - b_{11})(a_{22} + b_{22}). \tag{2.7}$$

Тогда положение равновесия (x_0, y_0) *системы* (2.2) *является асимптотически устойчивым.*

Замечание 1. В работе [13] также было показано, что результат останется верным и в случае $a_{12}b_{21} = (a_{11} - b_{11})(a_{22} + b_{22})$.

Следующая наша цель — при выполнении условий (2.1) и (2.7) построить модифицированный функционал Ляпунова – Красовского, который в дальнейшем будет использован для получения оценок решений системы (1.1), характеризующих скорость сходимости к положению равновесия (x_0, u_0, y_0, v_0).

Вначале приведем результат об асимптотической устойчивости нулевого решения линейной системы с запаздывающим аргументом

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}(t-\tau), \tag{2.8}$$

вытекающий из работы [3].

Теорема 2. *Пусть существуют матрицы* $H = H^* > 0$ *и* $K(s) \in C^1([0,\tau])$ *такие, что* $K(s) = K^*(s) > 0$, $\dfrac{d}{ds}K(s) < 0$, $s \in [0,\tau]$, *при этом*

$$C = -\begin{pmatrix} H\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^*H + K(0) & H\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^*H & -K(\tau) \end{pmatrix} > 0.$$

Тогда нулевое решение системы (2.8) *является асимптотически устойчивым.*

Замечание 2. Неравенство $H > 0$ означает, что матрица H является положительно определенной.

При доказательстве теоремы 2 использовался модифицированный функционал Ляпунова – Красовского следующего вида

$$V(t,\boldsymbol{y}) = \langle H\boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{y}(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)\boldsymbol{y}(s), \boldsymbol{y}(s)\rangle\, ds. \tag{2.9}$$

Важно отметить, что при выполнении условий теоремы 2 с помощью данного функционала были получены оценки решений системы (2.8), характеризующие скорость убывания на бесконечности. Функционал (2.9) также позволяет получать оценки областей притяжения нулевого решения и оценки скорости убывания решений и для нелинейных систем с запаздывающим аргументом (см., например, [3, 4, 7]).

Результаты работы [3] легко обобщаются на случай нескольких запаздываний (см., например, [2]). В частности, если система содержит два запаздывания

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{y}(t-\tau_1) + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{y}(t-\tau_2), \tag{2.10}$$

тогда для асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.10) достаточно потребовать существование матриц $H = H^* > 0$, $K_1(s) \in C^1([0,\tau_1])$ и $K_2(s) \in C^1([0,\tau_2])$ таких, что

$$K_1(s) = K_1^*(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K_1(s) < 0, \quad s \in [0,\tau_1], \tag{2.11}$$

$$K_2(s) = K_2^*(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K_2(s) < 0, \quad s \in [0,\tau_2], \tag{2.12}$$

причем

$$C = -\begin{pmatrix} H\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^*H + K_1(0) + K_2(0) & H\boldsymbol{B}_1 & H\boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{B}_1^*H & -K_1(\tau_1) & 0 \\ \boldsymbol{B}_2^*H & 0 & -K_2(\tau_2) \end{pmatrix} > 0. \tag{2.13}$$

Доказательство этого проводится с использованием функционала

$$V(t,\boldsymbol{y}) = \langle H\boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{y}(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau_1}^{t} \langle K_1(t-s)\boldsymbol{y}(s), \boldsymbol{y}(s)\rangle\, ds$$

$$+ \int\limits_{t-\tau_2}^{t} \langle K_2(t-s)\boldsymbol{y}(s), \boldsymbol{y}(s)\rangle\, ds. \tag{2.14}$$

Предполагая, что справедливы неравенства (2.1) и (2.7) и матрицы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$ имеют вид (2.5), построим модифицированный функционал Ляпунова – Красовского (2.14) для системы (2.10) такой, что выполнены условия (2.11)–(2.13). Для этого подберем соответствующие матрицы $H = H^* > 0$, $K_1(s) \in C^1([0,\tau_1])$, $K_2(s) \in C^1([0,\tau_2])$.

Положим

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix},$$

$$K_1(s) = e^{-\kappa_1 s}(\alpha B_1^* B_1 + M_1), \quad M_1 = M_1^* > 0, \quad \alpha, \kappa_1 > 0,$$

$$K_2(s) = e^{-\kappa_2 s}(\beta B_2^* B_2 + M_2), \quad M_2 = M_2^* > 0, \quad \beta, \kappa_2 > 0.$$

Заметим, что $B_1^*H = B_1^*\widetilde{H}_1$, $B_2^*H = B_2^*\widetilde{H}_2$, где

$$\widetilde{H}_1 = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{H}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix}.$$

В этом случае матрица (2.13) будет иметь вид $C =$

$$\begin{pmatrix} -\Big(HA + A^*H + \alpha B_1^* B_1 + \beta B_2^* B_2\Big) - M_1 - M_2 & -\widetilde{H}_1^* B_1 & -\widetilde{H}_2^* B_2 \\ -B_1^* \widetilde{H}_1 & e^{-\kappa_1\tau_1}(\alpha B_1^* B_1 + M_1) & 0 \\ -B_2^* \widetilde{H}_2 & 0 & e^{-\kappa_2\tau_2}(\beta B_2^* B_2 + M_2) \end{pmatrix}.$$

Введем обозначение

$$R = -\Big(HA + A^*H + \alpha B_1^* B_1 + \beta B_2^* B_2$$

$$+\frac{1}{\alpha} e^{\kappa_1\tau_1} \widetilde{H}_1^* \widetilde{H}_1 + \frac{1}{\beta} e^{\kappa_2\tau_2} \widetilde{H}_2^* \widetilde{H}_2\Big) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{pmatrix}. \qquad (2.15)$$

Тогда матрица C преобразуется к виду

$$C = \begin{pmatrix} R - M_1 - M_2 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\kappa_1\tau_1} M_1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\kappa_2\tau_2} M_2 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} e^{\kappa_1\tau_1} \widetilde{H}_1^* \widetilde{H}_1 & -\widetilde{H}_1^* B_1 & 0 \\ -B_1^* \widetilde{H}_1 & \alpha e^{-\kappa_1\tau_1} B_1^* B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} e^{\kappa_2\tau_2} \widetilde{H}_2^* \widetilde{H}_2 & 0 & -\widetilde{H}_2^* B_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -B_2^* \widetilde{H}_2 & 0 & \beta e^{-\kappa_2\tau_2} B_2^* B_2 \end{pmatrix}$$

$$\geq \begin{pmatrix} R - M_1 - M_2 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\kappa_1\tau_1} M_1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\kappa_2\tau_2} M_2 \end{pmatrix}. \qquad (2.16)$$

Тем самым, наша задача свелась к тому, чтобы показать положительную определенность матрицы R. В этом случае легко подобрать матрицы M_1 и M_2 так, чтобы матрица C также была положительно определенной.

Учитывая явный вид матриц A, B_1, B_2, H, $\widetilde{H}_1$ и $\widetilde{H}_2$, получим следующие формулы для элементов матрицы R:

$$\begin{cases} r_{11} = 2a_{11}h_{11} - \alpha b_{11}^2 - \beta b_{21}^2 - \frac{1}{\alpha} e^{\kappa_1\tau_1} h_{11}^2 - \frac{1}{\beta} e^{\kappa_2\tau_2} h_{12}^2, \\ r_{12} = a_{12}h_{11} + (a_{11} + a_{22})h_{12} - \beta b_{21} b_{22} - \frac{1}{\alpha} e^{\kappa_1\tau_1} h_{11} h_{12} - \frac{1}{\beta} e^{\kappa_2\tau_2} h_{12} h_{22}, \\ r_{22} = 2a_{12}h_{12} + 2a_{22}h_{22} - \beta b_{22}^2 - \frac{1}{\alpha} e^{\kappa_1\tau_1} h_{12}^2 - \frac{1}{\beta} e^{\kappa_2\tau_2} h_{22}^2. \end{cases} \qquad (2.17)$$

Заметим, что в силу обозначений величин a_{22} и b_{22} имеет место неравенство $a_{22} \geq b_{22}$. Далее мы будем рассматривать два случая: $a_{22} > b_{22}$ и $a_{22} = b_{22}$.

Случай $a_{22} > b_{22}$.

В этом случае положим $h_{12} = 0$, тогда

$$\begin{cases} r_{11} = 2a_{11}h_{11} - \alpha b_{11}^2 - \beta b_{21}^2 - \dfrac{1}{\alpha} e^{\kappa_1\tau_1} h_{11}^2, \\ r_{12} = a_{12}h_{11} - \beta b_{21}b_{22}, \\ r_{22} = 2a_{22}h_{22} - \beta b_{22}^2 - \dfrac{1}{\beta} e^{\kappa_2\tau_2} h_{22}^2. \end{cases}$$

Величину α выберем так, чтобы величина r_{11} принимала наибольшее значение. Тогда

$$\alpha = \frac{h_{11}}{b_{11}} e^{\kappa_1\tau_1/2}.$$

Величину h_{22} выберем так, чтобы величина r_{22} принимала наибольшее значение. Тогда

$$h_{22} = \beta a_{22} e^{-\kappa_2\tau_2}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} r_{11} = 2(a_{11} - b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2})h_{11} - \beta b_{21}^2, \\ r_{12} = a_{12}h_{11} - \beta b_{21}b_{22}, \\ r_{22} = \beta(a_{22}^2 e^{-\kappa_2\tau_2} - b_{22}^2). \end{cases}$$

Определитель матрицы R имеет вид:

$$r_{11}r_{22} - r_{12}^2 = \beta(a_{22}^2 e^{-\kappa_2\tau_2} - b_{22}^2)\Big(2(a_{11} - b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2})h_{11} - \beta b_{21}^2\Big) - \Big(a_{12}h_{11} - \beta b_{21}b_{22}\Big)^2$$

$$= 2\beta\Big((a_{11} - b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2})(a_{22}^2 e^{-\kappa_2\tau_2} - b_{22}^2) + a_{12}b_{21}b_{22}\Big)h_{11} - \beta^2 a_{22}^2 b_{21}^2 e^{-\kappa_2\tau_2} - a_{12}^2 h_{11}^2.$$

Полагая

$$h_{11} = \frac{\beta}{a_{12}^2}\Big((a_{11} - b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2})(a_{22}^2 e^{-\kappa_2\tau_2} - b_{22}^2) + a_{12}b_{21}b_{22}\Big),$$

будем иметь

$$r_{11}r_{22} - r_{12}^2 = \frac{\beta^2}{a_{12}^2}\left[\Big((a_{11} - b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2})(a_{22}^2 e^{-\kappa_2\tau_2} - b_{22}^2) + a_{12}b_{21}b_{22}\Big)^2 - (a_{12}b_{21}a_{22})^2 e^{-\kappa_2\tau_2}\right].$$

Элементы матрицы R преобразуются к виду

$$\begin{cases} r_{11} = \dfrac{\beta}{a_{12}^2}(a_{11} - b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2})^2(a_{22}^2 e^{-\kappa_2\tau_2} - b_{22}^2) \\ + \dfrac{\beta}{a_{12}^2}\left[(a_{11} - b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2})^2 a_{22}^2 e^{-\kappa_2\tau_2} - \Big((a_{11} - b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2})b_{22} - a_{12}b_{21}\Big)^2\right], \\ r_{12} = \dfrac{\beta}{a_{12}}(a_{11} - b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2})(a_{22}^2 e^{-\kappa_2\tau_2} - b_{22}^2), \\ r_{22} = \beta(a_{22}^2 e^{-\kappa_2\tau_2} - b_{22}^2). \end{cases}$$

Для определенности положим $\beta = 1$. Положительная определенность матрицы R эквивалентна условиям

$$\begin{cases} a_{22}e^{-\kappa_2\tau_2/2} > b_{22}, \\ (a_{11} - b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2})(a_{22}e^{-\kappa_2\tau_2/2} + b_{22}) > a_{12}b_{21}. \end{cases} \tag{2.18}$$

В силу условия $a_{22} > b_{22}$ и условия (2.7) можно подобрать величины $\kappa_1 > 0$ и $\kappa_2 > 0$, при которых эти неравенства будут выполнены. Итак, окончательно получим

$$\alpha = \frac{e^{\kappa_1\tau_1/2}}{a_{12}^2 b_{11}}\Big((a_{11} - b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2})(a_{22}^2 e^{-\kappa_2\tau_2} - b_{22}^2) + a_{12}b_{21}b_{22}\Big) > 0, \quad \beta = 1, \tag{2.19}$$

$$h_{11} = \frac{1}{a_{12}^2}\Big((a_{11} - b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2})(a_{22}^2 e^{-\kappa_2\tau_2} - b_{22}^2) + a_{12}b_{21}b_{22}\Big) > 0, \tag{2.20}$$

$$h_{12} = 0, \quad h_{22} = a_{22}e^{-\kappa_2\tau_2} > 0. \tag{2.21}$$

В случае $a_{22} > b_{22}$ модифицированный функционал Ляпунова – Красовского построен, при этом выполнены условия (2.11)–(2.13).

Случай $a_{22} = b_{22}$.

Воспользуемся формулами, полученными в предыдущем случае. Используя (2.19)–(2.21) и учитывая, что $a_{22} = b_{22}$, положим

$$\alpha = \frac{b_{22}e^{\kappa_1\tau_1/2}}{a_{12}^2 b_{11}}\Big(a_{12}b_{21} - (a_{11} - b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2})b_{22}(1 - e^{-\kappa_2\tau_2})\Big) > 0, \quad \beta = 1, \tag{2.22}$$

$$h_{11} = \frac{b_{22}}{a_{12}^2}\Big(a_{12}b_{21} - (a_{11} - b_{11}e^{\kappa_1\tau_1/2})b_{22}(1 - e^{-\kappa_2\tau_2})\Big) > 0, \quad h_{22} = b_{22}e^{-\kappa_2\tau_2} > 0. \tag{2.23}$$

Подставим эти величины в (2.17), учитывая, что $a_{22} = b_{22}$:

$$\begin{cases} r_{11} = \dfrac{b_{21}}{a_{12}}\Big(2(a_{11} - b_{11}e^{\varkappa_1\tau_1/2})b_{22} - a_{12}b_{21}\Big) \\ -2\dfrac{b_{22}^2}{a_{12}^2}(a_{11} - b_{11}e^{\varkappa_1\tau_1/2})^2(1 - e^{-\varkappa_2\tau_2}) - e^{\varkappa_2\tau_2}h_{12}^2, \\ r_{12} = (a_{11} - b_{11}e^{\varkappa_1\tau_1/2})\left(h_{12} - \dfrac{b_{22}^2}{a_{12}}(1 - e^{-\varkappa_2\tau_2})\right), \\ r_{22} = 2a_{12}h_{12} - \dfrac{a_{12}^2 b_{11}e^{\varkappa_1\tau_1/2}h_{12}^2}{b_{22}\Big(a_{12}b_{21} - (a_{11} - b_{11}e^{\varkappa_1\tau_1/2})b_{22}(1 - e^{-\varkappa_2\tau_2})\Big)} - b_{22}^2(1 - e^{-\varkappa_2\tau_2}). \end{cases}$$

Полагая
$$h_{12} = \frac{b_{22}^2}{a_{12}}(1 - e^{-\varkappa_2\tau_2}), \tag{2.24}$$
будем иметь

$$\begin{cases} r_{11} = \dfrac{b_{21}}{a_{12}}\Big(2(a_{11} - b_{11}e^{\varkappa_1\tau_1/2})b_{22} - a_{12}b_{21}\Big) \\ -\dfrac{b_{22}^2}{a_{12}^2}(1 - e^{-\varkappa_2\tau_2})\Big(2(a_{11} - b_{11}e^{\varkappa_1\tau_1/2})^2 + b_{22}^2(e^{\varkappa_2\tau_2} - 1)\Big), \\ r_{12} = 0, \\ r_{22} = \dfrac{\Big(a_{12}b_{21} - a_{11}b_{22}(1 - e^{-\varkappa_2\tau_2})\Big)b_{22}^2(1 - e^{-\varkappa_2\tau_2})}{\Big(a_{12}b_{21} - (a_{11} - b_{11}e^{\varkappa_1\tau_1/2})b_{22}(1 - e^{-\varkappa_2\tau_2})\Big)}. \end{cases}$$

Положительная определенность матрицы R эквивалентна условиям

$$\begin{cases} b_{22}^2(1 - e^{-\varkappa_2\tau_2})\Big(2(a_{11} - b_{11}e^{\varkappa_1\tau_1/2})^2 + b_{22}^2(e^{\varkappa_2\tau_2} - 1)\Big) \\ < a_{12}b_{21}\Big(2(a_{11} - b_{11}e^{\varkappa_1\tau_1/2})b_{22} - a_{12}b_{21}\Big), \\ a_{11}b_{22}(1 - e^{-\varkappa_2\tau_2}) < a_{12}b_{21}. \end{cases} \tag{2.25}$$

В силу условия $a_{22} = b_{22}$ и условия (2.7) можно подобрать величины $\varkappa_1 > 0$ и $\varkappa_2 > 0$, при которых эти неравенства будут выполнены.

Также нетрудно видеть, что при выполнении условий (2.25) матрица H является положительно определенной. Действительно, из (2.15) вытекает, что

$$HA + A^*H = -R - \alpha B_1^*B_1 - \beta B_2^*B_2 - \frac{1}{\alpha}e^{\varkappa_1\tau_1}\widetilde{H}_1^*\widetilde{H}_1 - \frac{1}{\beta}e^{\varkappa_2\tau_2}\widetilde{H}_2^*\widetilde{H}_2 < 0,$$

т. е. матрица $H = H^*$ является решением матричного уравнения Ляпунова $HA + A^*H = -S$, где $S = S^* > 0$. Поскольку все собственные значения матрицы A содержатся в левой полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda < 0\}$, отсюда следует положительная определенность матрицы H (см., например, [1], гл. 1, § 4]).

Итак, в случае $a_{22} = b_{22}$ модифицированный функционал Ляпунова – Красовского построен, при этом условия (2.11)–(2.13) также выполняются.

3. Оценки для модифицированного функционала Ляпунова – Красовского

В этом параграфе мы будем предполагать, что выполнены условия (2.1) и (2.7). Как уже отмечалось, из этих условий вытекает асимптотическая устойчивость положения равновесия (x_0, y_0) системы (2.2). Также при выполнении этих условий в предыдущем параграфе был построен модифицированный функционал Ляпунова – Красовского, с использованием которого устанавливается асимптотическая устойчивость. В данном параграфе мы получим оценки для этого функционала, из которых будут следовать оценки решений системы (2.2), характеризующие скорость сходимости к положению равновесия (x_0, y_0) при $t \to \infty$.

Рассмотрим систему (2.2), для которой зададим начальные условия:

$$\begin{cases} x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau_{\max}, 0], \quad x(+0) = \varphi(0), \\ y(t) = \psi(t), \quad t \in [-\tau_{\max}, 0], \quad y(+0) = \psi(0), \end{cases} \tag{3.1}$$

где

$$\tau_{\max} = \max\{\tau_1, \tau_2\},$$

$\varphi(t)$, $\psi(t)$ — заданные неотрицательные непрерывные функции. Хорошо известно, что решение начальной задачи (2.2), (3.1) существует и единственно, при этом, как было отмечено в [20], решение будет определено при всех $t \geq 0$, и более того, будут выполнены неравенства $x(t) \geq 0$ и $y(t) \geq 0$ при всех $t \geq 0$. Также можно показать, что компоненты решения начальной задачи будут ограничены сверху при всех $t \geq 0$ [13].

Как было отмечено в предыдущем параграфе, задача об устойчивости положения равновесия (x_0, y_0) системы (2.2) сводится к задаче об устойчивости нулевого решения при помощи замены (2.3). При этой замене начальная задача (2.2), (3.1) преобразуется к начальной задаче для системы (2.4):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\widetilde{\boldsymbol{y}}(t) = A\widetilde{\boldsymbol{y}}(t) + B_1\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_1) + B_2\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2) + F_0(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)) + G(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2)), \\ \\ \widetilde{\boldsymbol{y}}(t) = \widetilde{\boldsymbol{\psi}}(t), \quad t \in [-\tau_{\max}, 0], \quad \widetilde{\boldsymbol{y}}(+0) = \widetilde{\boldsymbol{\psi}}(0), \end{cases} \tag{3.2}$$

где

$$\widetilde{\boldsymbol{\psi}}(t) = \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}(t) \\ \widetilde{\psi}(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{\psi}(t) - \boldsymbol{y}_0, \quad \boldsymbol{\psi}(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Рассмотрим модифицированный функционал Ляпунова – Красовского

$$V(t,\widetilde{\boldsymbol{y}}) = \langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau_1}^{t} \langle K_1(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s), \widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\rangle\, ds$$

$$+ \int\limits_{t-\tau_2}^{t} \langle K_2(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s), \widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\rangle\, ds, \tag{3.4}$$

где

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} > 0, \quad K_1(s) = \alpha e^{-\kappa_1 s} B_1^* B_1, \quad \alpha, \kappa_1 > 0,$$

$$K_2(s) = e^{-\kappa_2 s}(\beta B_2^* B_2 + M_2), \quad M_2 = M_2^* > 0, \quad \beta, \kappa_2 > 0.$$

Величины h_{11}, h_{12}, h_{22}, α, β, κ_1, κ_2 определены в предыдущем параграфе (формулы (2.18)–(2.21) в случае $a_{22} > b_{22}$ и формулы (2.22)–(2.25) в случае $a_{22} = b_{22}$), матрица M_2 будет определена ниже.

Для формулировки результатов нам потребуются следующие обозначения. Пусть $c > 0$ — наибольшее число такое, что выполнено неравенство

$$\langle R\widetilde{\boldsymbol{y}}, \widetilde{\boldsymbol{y}}\rangle \geq c\, \langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}, \widetilde{\boldsymbol{y}}\rangle\,, \quad \widetilde{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^2, \tag{3.5}$$

где матрица $R > 0$ определена в (2.15). Нетрудно проверить, что величина $c > 0$ определяется по формуле

$$c = \frac{1}{(h_{11}h_{22} - h_{12}^2)} \Bigg(\frac{1}{2}(h_{11}r_{22} + h_{22}r_{11} - 2h_{12}r_{12})$$

$$- \sqrt{\frac{1}{4}(h_{11}r_{22} - h_{22}r_{11})^2 + (h_{11}r_{12} - h_{12}r_{11})(h_{22}r_{12} - h_{12}r_{22})} \Bigg).$$

Далее, пусть $\theta > 0$ такое, что

$$2ne^{-c_2\tau_2}\mu\sqrt{h_{22}}\,\theta\, e^{\kappa_2\tau_2/2} < c, \tag{3.6}$$

где

$$\mu = \frac{1}{(h_{11}h_{22} - h_{12}^2)} \Bigg(\frac{1}{2}(h_{11}p_{22} + h_{22}p_{11} + 2|h_{12}|p_{12})$$

$$+ \sqrt{\frac{1}{4}(h_{11}p_{22} - h_{22}p_{11})^2 + (h_{11}p_{12} + |h_{12}|p_{11})(h_{22}p_{12} + |h_{12}|p_{22})} \Bigg), \tag{3.7}$$

$$p_{11} = \frac{bk_1y_0(1 + k_2y_0)}{(1 + k_1x_0 + k_2y_0)^2}, \tag{3.8}$$

$$p_{12} = \frac{b\Big(1 + k_1 x_0 + k_2 y_0 + 2k_1 x_0 k_2 y_0\Big)}{2(1 + k_1 x_0 + k_2 y_0)^2}, \tag{3.9}$$

$$p_{22} = \frac{b k_2 x_0 (1 + k_1 x_0)}{(1 + k_1 x_0 + k_2 y_0)^2}. \tag{3.10}$$

Положим

$$M_2 = m_2 H, \quad m_2 = n e^{-c_2 \tau_2} \mu \sqrt{h_{22}}\, \theta\, e^{\kappa_2 \tau_2 / 2}. \tag{3.11}$$

Также обозначим

$$\varepsilon = \min\{c - 2n e^{-c_2 \tau_2} \mu \sqrt{h_{22}}\, \theta\, e^{\kappa_2 \tau_2/2}, \kappa_1, \kappa_2\} > 0, \quad q = 2\nu \sqrt{h_{11}}, \tag{3.12}$$

где

$$\nu = \frac{1}{(h_{11} h_{22} - h_{12}^2)} \Bigg(\frac{1}{2} (h_{11} q_{22} + h_{22} q_{11} + 2|h_{12}| q_{12})$$

$$+ \sqrt{\frac{1}{4} (h_{11} q_{22} - h_{22} q_{11})^2 + (h_{11} q_{12} + |h_{12}| q_{11})(h_{22} q_{12} + |h_{12}| q_{22})} \Bigg), \tag{3.13}$$

$$q_{11} = a + p_{11}, \quad q_{12} = p_{12}, \quad q_{22} = p_{22}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (2.1) *и* (2.7). *Тогда для решения* $\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)$ *начальной задачи* (3.2) *с начальными данными, удовлетворяющими условиям*

$$\widetilde{\varphi}(t) \geq -x_0, \quad \widetilde{\psi}(t) \geq -y_0, \quad t \in [-\tau_{\max}, 0], \tag{3.14}$$

$$\sqrt{\Big\langle H \widetilde{\boldsymbol{\psi}}(t), \widetilde{\boldsymbol{\psi}}(t) \Big\rangle} \leq \theta, \quad t \in [-\tau_2, 0], \tag{3.15}$$

$$\sqrt{V(0, \widetilde{\boldsymbol{\psi}})} < \frac{\varepsilon}{q}, \quad \frac{\sqrt{V(0, \widetilde{\boldsymbol{\psi}})}}{\Big(1 - \frac{q}{\varepsilon} \sqrt{V(0, \widetilde{\boldsymbol{\psi}})}\Big)} \leq \theta, \tag{3.16}$$

справедлива оценка

$$\sqrt{\langle H \widetilde{\boldsymbol{y}}(t), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t) \rangle} \leq \frac{\sqrt{V(0, \widetilde{\boldsymbol{\psi}})}}{\Big(1 - \frac{q}{\varepsilon} \sqrt{V(0, \widetilde{\boldsymbol{\psi}})}\Big)}\, e^{-\varepsilon t/2}, \quad t > 0. \tag{3.17}$$

Доказательство. Рассмотрим модифицированный функционал Ляпунова – Красовского (3.4). Дифференцируя его вдоль решения начальной задачи (3.2), получим

$$\frac{d}{dt} V(t, \widetilde{\boldsymbol{y}}) = \Big\langle H \frac{d}{dt} \widetilde{\boldsymbol{y}}(t), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t) \Big\rangle + \Big\langle H \widetilde{\boldsymbol{y}}(t), \frac{d}{dt} \widetilde{\boldsymbol{y}}(t) \Big\rangle$$

$$+\langle K_1(0)\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\rangle-\langle K_1(\tau_1)\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_1),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_1)\rangle+\int\limits_{t-\tau_1}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}K_1(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s),\widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\right\rangle ds$$

$$+\langle K_2(0)\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\rangle-\langle K_2(\tau_2)\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2)\rangle+\int\limits_{t-\tau_2}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}K_2(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s),\widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\right\rangle ds$$

$$=-\left\langle C\begin{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\\ \widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_1)\\ \widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\\ \widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_1)\\ \widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2)\end{pmatrix}\right\rangle+2\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),F_0(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t))\right\rangle+2\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),G(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2))\right\rangle$$

$$-\kappa_1\int\limits_{t-\tau_1}^{t}\langle K_1(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s),\widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\rangle\,ds-\kappa_2\int\limits_{t-\tau_2}^{t}\langle K_2(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s),\widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\rangle\,ds,$$

где матрица $C>0$ определена в (2.13). Проводя те же самые рассуждения, что и при получении неравенства (2.16), мы приходим к следующей оценке

$$\frac{d}{dt}V(t,\widetilde{\boldsymbol{y}})\le-\langle(R-M_2)\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\rangle-e^{-\kappa_2\tau_2}\left\langle M_2\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2)\right\rangle$$

$$+2\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),F_0(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t))\right\rangle+2\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),G(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2))\right\rangle$$

$$-\kappa_1\int\limits_{t-\tau_1}^{t}\langle K_1(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s),\widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\rangle\,ds-\kappa_2\int\limits_{t-\tau_2}^{t}\langle K_2(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s),\widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\rangle\,ds.$$

Учитывая неравенство (3.5), будем иметь

$$\frac{d}{dt}V(t,\widetilde{\boldsymbol{y}})\le-c\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\right\rangle+2\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),F_0(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t))\right\rangle$$

$$+2\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),G(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2))\right\rangle+\langle M_2\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\rangle-e^{-\kappa_2\tau_2}\left\langle M_2\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2)\right\rangle$$

$$-\kappa_1\int\limits_{t-\tau_1}^{t}\langle K_1(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s),\widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\rangle\,ds-\kappa_2\int\limits_{t-\tau_2}^{t}\langle K_2(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s),\widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\rangle\,ds.$$

Оценим $2\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),F_0(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t))\right\rangle$. Учитывая явный вид вектор-функции $F_0(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t))$, получим оценку

$$2\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),F_0(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t))\right\rangle\le2\sqrt{\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\rangle}\sqrt{\langle HF_0(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)),F_0(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t))\rangle}$$

$$=2\sqrt{\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\rangle}\sqrt{h_{11}}|a\widetilde{x}^2(t)+h(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t))|.$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условий (3.14) компоненты решения начальной задачи (3.2) будут удовлетворять условиям $\widetilde{x}(t)\ge-x_0$ и $\widetilde{y}(t)\ge-y_0$ при всех $t \geq 0$. Поэтому из явного представления (2.6) функции $h(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t))$ вытекает следующее неравенство

$$|a\widetilde{x}^2(t) + h(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t))| \leq (a+p_{11})\widetilde{x}^2(t) + 2p_{12}|\widetilde{x}(t)||\widetilde{y}(t)| + p_{22}\widetilde{y}^2(t)$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} a+p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\widetilde{x}(t)| \\ |\widetilde{y}(t)| \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} |\widetilde{x}(t)| \\ |\widetilde{y}(t)| \end{pmatrix} \right\rangle \leq \nu \left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t) \right\rangle,$$

где величины p_{11}, p_{12}, p_{22} определены в (3.8)–(3.10), ν определено в (3.13). Следовательно,

$$2\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), F_0(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)) \right\rangle \leq 2\nu\sqrt{h_{11}} \left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t) \right\rangle^{3/2} \leq qV^{3/2}(t, \widetilde{\boldsymbol{y}}),$$

где q определено в (3.12). Отсюда получим оценку на производную функционала $V(t, \widetilde{\boldsymbol{y}})$:

$$\frac{d}{dt}V(t,\widetilde{\boldsymbol{y}}) \leq -c\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\right\rangle + qV^{3/2}(t,\widetilde{\boldsymbol{y}})$$

$$+2\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), G(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2))\right\rangle + \left\langle M_2\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\right\rangle - e^{-\kappa_2\tau_2}\left\langle M_2\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2)\right\rangle$$

$$-\kappa_1\int\limits_{t-\tau_1}^{t}\left\langle K_1(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s), \widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\right\rangle ds - \kappa_2\int\limits_{t-\tau_2}^{t}\left\langle K_2(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s), \widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\right\rangle ds.$$

Теперь оценим $2\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), G(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2))\right\rangle$. Имеем

$$2\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), G(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2))\right\rangle \leq 2\sqrt{\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\right\rangle}\sqrt{\left\langle HG(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2)), G(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2))\right\rangle}$$

$$= 2\sqrt{\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\right\rangle}\sqrt{h_{22}}\; ne^{-c_2\tau_2}|h(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2))|.$$

Учитывая неравенства $\widetilde{x}(t) \geq -x_0$, $\widetilde{y}(t) \geq -y_0$ и представление (2.6), получим оценку

$$|h(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2))| \leq p_{11}\widetilde{x}^2(t-\tau_2) + 2p_{12}|\widetilde{x}(t-\tau_2)||\widetilde{y}(t-\tau_2)| + p_{22}\widetilde{y}^2(t-\tau_2)$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\widetilde{x}(t-\tau_2)| \\ |\widetilde{y}(t-\tau_2)| \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} |\widetilde{x}(t-\tau_2)| \\ |\widetilde{y}(t-\tau_2)| \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mu \left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2) \right\rangle,$$

где величины p_{11}, p_{12}, p_{22} определены в (3.8)–(3.10), μ определено в (3.7). Следовательно,

$$2\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), G(\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2))\right\rangle \leq 2ne^{-c_2\tau_2}\mu\sqrt{h_{22}}\sqrt{\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\right\rangle}\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2)\right\rangle.$$

Отсюда получим оценку на производную функционала $V(t, \widetilde{\boldsymbol{y}})$:

$$\frac{d}{dt}V(t,\widetilde{\boldsymbol{y}}) \leq -c\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\right\rangle + qV^{3/2}(t,\widetilde{\boldsymbol{y}})$$

$$+2ne^{-c_2\tau_2}\mu\sqrt{h_{22}}\sqrt{\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\right\rangle}\left\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2)\right\rangle$$

$$
+\langle M_2\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\rangle - e^{-\kappa_2\tau_2}\langle M_2\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2)\rangle
$$
$$
-\kappa_1\int\limits_{t-\tau_1}^{t}\langle K_1(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s),\widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\rangle\,ds-\kappa_2\int\limits_{t-\tau_2}^{t}\langle K_2(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s),\widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\rangle\,ds. \tag{3.18}
$$

Вначале предположим, что $t\in[0,\tau_2]$. В этом случае в силу неравенства (3.15) будем иметь оценку
$$
\sqrt{\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2)\rangle}\le\theta. \tag{3.19}
$$
Учитывая данное неравенство и определение (3.11), из (3.18) получим оценку
$$
\frac{d}{dt}V(t,\widetilde{\boldsymbol{y}})\le -c\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\rangle+qV^{3/2}(t,\widetilde{\boldsymbol{y}})
$$
$$
+ne^{-c_2\tau_2}\mu\sqrt{h_{22}}\,\theta\Big(2\sqrt{\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\rangle}\sqrt{\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2)\rangle}
$$
$$
+e^{\kappa_2\tau_2/2}\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\rangle-e^{-\kappa_2\tau_2/2}\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t-\tau_2)\rangle\Big)
$$
$$
-\kappa_1\int\limits_{t-\tau_1}^{t}\langle K_1(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s),\widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\rangle\,ds-\kappa_2\int\limits_{t-\tau_2}^{t}\langle K_2(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s),\widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\rangle\,ds
$$
$$
\le-\Big(c-2ne^{-c_2\tau_2}\mu\sqrt{h_{22}}\,\theta\,e^{\kappa_2\tau_2/2}\Big)\langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t),\widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\rangle+qV^{3/2}(t,\widetilde{\boldsymbol{y}})
$$
$$
-\kappa_1\int\limits_{t-\tau_1}^{t}\langle K_1(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s),\widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\rangle\,ds-\kappa_2\int\limits_{t-\tau_2}^{t}\langle K_2(t-s)\widetilde{\boldsymbol{y}}(s),\widetilde{\boldsymbol{y}}(s)\rangle\,ds.
$$
Отсюда нетрудно получить оценку
$$
\frac{d}{dt}V(t,\widetilde{\boldsymbol{y}})\le-\varepsilon V(t,\widetilde{\boldsymbol{y}})+qV^{3/2}(t,\widetilde{\boldsymbol{y}}),
$$
где ε определено в (3.12). Из данной оценки, используя неравенство Гронуолла (см., например, [15]), установим оценку
$$
V(t,\widetilde{\boldsymbol{y}})\le\frac{V(0,\widetilde{\boldsymbol{\psi}})\,e^{-\varepsilon t}}{\left(1-\dfrac{q}{\varepsilon}\sqrt{V(0,\widetilde{\boldsymbol{\psi}})}\right)^2}.
$$
Учитывая определение (3.4) функционала $V(t,\widetilde{\boldsymbol{y}})$, отсюда непосредственно вытекает (3.17). Тем самым, при $t\in[0,\tau_2]$ оценка (3.17) доказана.

Далее предположим, что $t\in[\tau_2,2\tau_2]$. В этом случае из неравенства (3.17), установленного при $t\in[0,\tau_2]$, и из неравенства (3.16) вытекает оценка (3.19). Тогда, повторяя рассуждения, приведенные выше, из (3.18) получим оценку (3.17) при $t\in[\tau_2,2\tau_2]$.

Оценка (3.17) при $t\in[m\tau_2,(m+1)\tau_2]$, $m\in\mathbb{N}$, легко устанавливается по индукции.

Теорема доказана. □

Теперь приведем результат для системы (2.2), непосредственно вытекающий из теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (2.1) *и* (2.7). *Тогда для решения* $(x(t), y(t))^{\mathrm{T}}$ *начальной задачи* (2.2), (3.1) *с начальными данными, удовлетворяющими условиям*

$$\varphi(t) \geq 0, \quad \psi(t) \geq 0, \quad t \in [-\tau_{\max}, 0], \tag{3.20}$$

$$\sqrt{\langle H(\boldsymbol{\psi}(t) - \boldsymbol{y}_0), (\boldsymbol{\psi}(t) - \boldsymbol{y}_0)\rangle} \leq \theta, \quad t \in [-\tau_2, 0], \tag{3.21}$$

$$\sqrt{V(0, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{y}_0)} < \frac{\varepsilon}{q}, \quad \frac{\sqrt{V(0, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{y}_0)}}{\left(1 - \frac{q}{\varepsilon}\sqrt{V(0, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{y}_0)}\right)} \leq \theta, \tag{3.22}$$

где θ *определено в* (3.6), ε *и* q *определены в* (3.12), *справедливы оценки*

$$|x(t) - x_0| \leq \left(\frac{h_{22}}{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{V(0, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{y}_0)}}{\left(1 - \frac{q}{\varepsilon}\sqrt{V(0, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{y}_0)}\right)} e^{-\varepsilon t/2}, \quad t > 0, \tag{3.23}$$

$$|y(t) - y_0| \leq \left(\frac{h_{11}}{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{V(0, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{y}_0)}}{\left(1 - \frac{q}{\varepsilon}\sqrt{V(0, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{y}_0)}\right)} e^{-\varepsilon t/2}, \quad t > 0. \tag{3.24}$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 3. Из оценки (3.17) и из неравенств

$$\widetilde{x}^2(t) \leq \frac{h_{22}}{h_{11}h_{22} - h_{12}^2} \langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\rangle, \quad \widetilde{y}^2(t) \leq \frac{h_{11}}{h_{11}h_{22} - h_{12}^2} \langle H\widetilde{\boldsymbol{y}}(t), \widetilde{\boldsymbol{y}}(t)\rangle$$

получим

$$|\widetilde{x}(t)| \leq \left(\frac{h_{22}}{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{V(0, \widetilde{\boldsymbol{\psi}})}}{\left(1 - \frac{q}{\varepsilon}\sqrt{V(0, \widetilde{\boldsymbol{\psi}})}\right)} e^{-\varepsilon t/2},$$

$$|\widetilde{y}(t)| \leq \left(\frac{h_{11}}{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{V(0, \widetilde{\boldsymbol{\psi}})}}{\left(1 - \frac{q}{\varepsilon}\sqrt{V(0, \widetilde{\boldsymbol{\psi}})}\right)} e^{-\varepsilon t/2}.$$

Учитывая замену (2.3) и обозначения (3.3), эти неравенства совпадают с (3.23), (3.24).

Теорема доказана. □

4. Оценки решений системы (1.1)

В данном параграфе мы изучим асимптотические свойства решений системы (1.1). Мы укажем множество начальных вектор-функций, при которых решения сходятся к положению равновесия (x_0, u_0, y_0, v_0), и получим оценки решений, характеризующие скорость стабилизации на бесконечности к данному положению равновесия. Как и ранее, мы будем предполагать, что выполнены условия (2.1) и (2.7), при которых положение равновесия (x_0, u_0, y_0, v_0) является асимптотически устойчивым (следствие теоремы 1).

Для системы (1.1) вместе с начальными условиями (3.1) на функции $x(t)$ и $y(t)$ зададим начальные условия на функции $u(t)$ и $v(t)$:

$$u(0) = u^{(0)}, \quad v(0) = v^{(0)}. \tag{4.1}$$

Решение начальной задачи (1.1), (3.1), (4.1) существует и единственно, при этом, если выполены условия (3.20) и условия

$$u^{(0)} \geq \int_{-\tau_1}^{0} re^{c_1 s}\varphi(s)ds, \quad v^{(0)} \geq \int_{-\tau_2}^{0} ne^{c_2 s} f(\varphi(s), \psi(s))ds, \tag{4.2}$$

то все компоненты решения будут неотрицательны (см., например, [13]).

Теперь перейдем к изучению асимптотических свойств решений системы (1.1) в окрестности положения равновесия (x_0, u_0, y_0, v_0). Очевидно, что при выполнении условий теоремы 4 для первой и третьей компонент решения $x(t)$ и $y(t)$ начальной задачи (1.1), (3.1), (4.1) справедливы оценки (3.23) и (3.24), характеризующие скорость стабилизации на бесконечности. Осталось получить оценки на $u(t)$ и $v(t)$.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (2.1) *и* (2.7). *Тогда для второй и четвертой компонент решения* $(x(t), u(t), y(t), v(t))^{\mathrm{T}}$ *начальной задачи* (1.1), (3.1), (4.1) *с начальными данными, удовлетворяющими условиям* (3.20)–(3.22), (4.2), *справедливы оценки:*

1) если $t \in [0, \tau_1]$, *то*

$$|u(t) - u_0| \leq e^{-c_1 t}\left|u^{(0)} - u_0 - \int_{-\tau_1}^{t-\tau_1} re^{c_1 s}(\varphi(s) - x_0)ds\right|$$

$$+e^{-c_1 t}\left(\int_0^t re^{(c_1-(\varepsilon/2))s}ds\right)\left(\frac{h_{22}}{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}\right)^{1/2}\Theta(\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{y}_0), \tag{4.3}$$

где ε *определено в* (3.12),

$$\Theta(\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{y}_0) = \frac{\sqrt{V(0, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{y}_0)}}{\left(1 - \dfrac{q}{\varepsilon}\sqrt{V(0, \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{y}_0)}\right)}; \tag{4.4}$$

2) если $t \geq \tau_1$, *то*

$$|u(t) - u_0| \leq \left(u^{(0)} - u_0 - \int_{-\tau_1}^{0} re^{c_1 s}(\varphi(s) - x_0)ds\right)e^{-c_1 t}$$

$$+\left(\int\limits_{-\tau_1}^{0} re^{(c_1-(\varepsilon/2))\xi}d\xi\right)\left(\frac{h_{22}}{h_{11}h_{22}-h_{12}^2}\right)^{1/2}\Theta(\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{y}_0)\,e^{-\varepsilon t/2}; \tag{4.5}$$

3) если $t\in[0,\tau_2]$, то

$$|v(t)-v_0|\le e^{-c_2t}\left|v^{(0)}-v_0-\int\limits_{-\tau_2}^{t-\tau_2} ne^{c_2s}(f(\varphi(s),\psi(s))-f(x_0,y_0))ds\right|$$

$$+e^{-c_2t}\left(\int\limits_{0}^{t} ne^{(c_2-(\varepsilon/2))s}ds\right)\omega\,\Theta(\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{y}_0)+e^{-c_2t}\left(\int\limits_{0}^{t} ne^{(c_2-\varepsilon)s}ds\right)\sigma\,\Theta^2(\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{y}_0), \tag{4.6}$$

где

$$\omega=\frac{b\Big[y_0(1+k_2y_0)\sqrt{h_{22}}+x_0(1+k_1x_0)\sqrt{h_{11}}\Big]}{(1+k_1x_0+k_2y_0)\sqrt{h_{11}h_{22}-h_{12}^2}},\quad \sigma=\frac{b\sqrt{h_{11}h_{22}}}{(h_{11}h_{22}-h_{12}^2)}; \tag{4.7}$$

4) если $t\ge\tau_2$, то

$$|v(t)-v_0|\le\left(v^{(0)}-v_0-\int\limits_{-\tau_2}^{0} ne^{c_2s}(f(\varphi(s),\psi(s))-f(x_0,y_0))ds\right)e^{-c_2t}$$

$$+\left(\int\limits_{-\tau_2}^{0} ne^{(c_2-(\varepsilon/2))\xi}d\xi\right)\omega\,\Theta(\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{y}_0)\,e^{-\varepsilon t/2}+\left(\int\limits_{-\tau_2}^{0} ne^{(c_2-\varepsilon)\xi}d\xi\right)\sigma\,\Theta^2(\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{y}_0)\,e^{-\varepsilon t}. \tag{4.8}$$

Доказательство. Из второго уравнения системы (1.1), используя метод вариации произвольной постоянной, нетрудно получить

$$u(t)=e^{-c_1t}\left(u(0)-\int\limits_{-\tau_1}^{t-\tau_1} re^{c_1s}x(s)ds\right)+e^{-c_1t}\int\limits_{0}^{t} re^{c_1s}x(s)ds$$

$$=e^{-c_1t}\left(u(0)-\int\limits_{-\tau_1}^{0} re^{c_1s}x(s)ds\right)+e^{-c_1t}\int\limits_{t-\tau_1}^{t} re^{c_1s}x(s)ds.$$

Следовательно,

$$u(t)-u_0=e^{-c_1t}\left(u(0)-u_0-\int\limits_{-\tau_1}^{0} re^{c_1s}(x(s)-x_0)ds\right)$$

$$+e^{-c_1 t}\int\limits_{t-\tau_1}^{t} re^{c_1 s}(x(s)-x_0)ds.$$

Отсюда, используя неравенство (3.23), с учетом обозначения (4.4) получим оценки (4.3) и (4.5).

Из четвертого уравнения системы (1.1), используя метод вариации произвольной постоянной, нетрудно получить

$$v(t)=e^{-c_2 t}\left(v(0)-\int\limits_{-\tau_2}^{t-\tau_2} ne^{c_2 s}f(x(s),y(s))ds\right)+e^{-c_2 t}\int\limits_{0}^{t} ne^{c_2 s}f(x(s),y(s))ds$$

$$=e^{-c_2 t}\left(v(0)-\int\limits_{-\tau_2}^{0} ne^{c_2 s}f(x(s),y(s))ds\right)+e^{-c_2 t}\int\limits_{t-\tau_2}^{t} ne^{c_2 s}f(x(s),y(s))ds.$$

Следовательно,

$$v(t)-v_0=e^{-c_2 t}\left(v(0)-v_0-\int\limits_{-\tau_2}^{0} ne^{c_2 s}(f(x(s),y(s))-f(x_0,y_0))ds\right)$$

$$+e^{-c_2 t}\int\limits_{t-\tau_2}^{t} ne^{c_2 s}(f(x(s),y(s))-f(x_0,y_0))ds. \tag{4.9}$$

Учитывая явный вид функции $f(x,y)$, получим

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=f(x_0+\widetilde{x},y_0+\widetilde{y})-f(x_0,y_0)$$

$$=\frac{b\Big[y_0(1+k_2y_0)\widetilde{x}+x_0(1+k_1x_0)\widetilde{y}+(1+k_1x_0+k_2y_0)\widetilde{x}\widetilde{y}\Big]}{[1+k_1x_0+k_2y_0][1+k_1(x_0+\widetilde{x})+k_2(y_0+\widetilde{y})]},$$

откуда

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\le\frac{by_0(1+k_2y_0)}{(1+k_1x_0+k_2y_0)}|x-x_0|$$

$$+\frac{bx_0(1+k_1x_0)}{(1+k_1x_0+k_2y_0)}|y-y_0|+b|x-x_0||y-y_0|.$$

Используя неравенства (3.23), (3.24) и учитывая обозначения (4.4), (4.7), установим оценку

$$|f(x(t),y(t))-f(x_0,y_0)|\le\omega\,\Theta(\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{y}_0)\,e^{-\varepsilon t/2}+\sigma\,\Theta^2(\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{y}_0)\,e^{-\varepsilon t}.$$

Из этой оценки и равенства (4.9) получим оценки (4.6) и (4.8).

Теорема доказана. □

Список цитируемых источников

1. *Демиденко Г. В.* Матричные уравнения. — Учебное пособие. — Новосибирск: Издательство Новосибирского государственного университета, 2009.

   Demidenko G. V. (2009). Matrix equations. Textbook. Novosibirsk: Publishing Office of Novosibirsk State University. (in Russian)

2. *Демиденко Г. В., Водопьянов Е. С., Скворцова М. А.* Оценки решений линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с несколькими отклонениями аргумента // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2013. — Т. 16, № 3. С. 53–60.

   Demidenko G. V., Vodop'yanov E. S., Skvortsova M. A. (2013). Estimates of solutions to linear differential equations of neutral type with several delays of argument. Journal of Applied and Industrial Mathematics, 7, No. 4 , 472–479.

3. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. — 2005. — Т. 5, № 3. — С. 20–28.

   Demidenko G. V., Matveeva I. I. (2005). Asymptotic properties of solutions to delay differential equations. Vestnik Novosibirskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya: Matematika, Mekhanika, Informatika, 5, No. 3, 20–28. (in Russian)

4. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сибирский математический журнал. — 2007. — Т. 48, № 5. — С. 1025–1040.

   Demidenko G. V., Matveeva I. I. (2007). Stability of solutions to delay differential equations with periodic coefficients of linear terms. Siberian Mathematical Journal, 48, No. 5, 824–836.

5. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сибирский математический журнал. — 2014. — Т. 55, № 5. — С. 1059–1077.

   Demidenko G. V., Matveeva I. I. (2014). On estimates of solutions to systems of differential equations of neutral type with periodic coefficients. Siberian Mathematical Journal, 55, No. 5, 866–881.

6. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И., Скворцова М. А.* Оценки решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах // Сибирский математический журнал. — 2019. — Т. 60, № 5. — С. 1063–1079.

   Demidenko G. V., Matveeva I. I., Skvortsova M. A. (2019). Estimates for solutions to neutral differential equations with periodic coefficients of linear terms. Siberian Mathematical Journal, 60, No. 5, 828–841.

7. *Матвеева И. И.* Оценки решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2013. — Т. 16, № 3. — С. 122–132.

   Matveeva I. I. (2013). Estimates of solutions to a class of systems of nonlinear delay differential equations. Journal of Applied and Industrial Mathematics, 7, No. 4, 557–566.

8. *Матвеева И. И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // Сибирский математический журнал. — 2017. — Т. 58, № 2. — С. 344–352.

Matveeva I. I. (2017). On exponential stability of solutions to periodic neutral-type systems. Siberian Mathematical Journal, 58, No. 2, 264–270.

9. *Матвеева И. И.* Оценки экспоненциального убывания решений линейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2019. — Т. 22, № 3. — С. 96–103.

Matveeva I. I. (2019). Estimates of the exponential decay of solutions to linear systems of neutral type with periodic coefficients. Journal of Applied and Industrial Mathematics, 13, No. 3, 511–518.

10. *Скворцова М. А.* Устойчивость решений в модели хищник-жертва с запаздыванием // Математические заметки СВФУ. — 2016. — Т. 23, № 2. — С. 108–120.

Skvortsova M. A. (2016). Stability of solutions in the predator-prey model with delay. Mathematical Notes of North-Eastern Federal University, 23, No. 2, 108–120. (in Russian)

11. *Скворцова М. А.* Асимптотическая устойчивость положений равновесия и оценки решений в одной модели заболевания // Динамические системы. — 2017. — Т. 7(35), № 3. — С. 257–274.

Skvortsova M. A. (2017). Asymptotic stability of equilibrium points and estimates of solutions in a model of disease. Dinamicheskie Sistemy, 7(35), No. 3, 257–274. (in Russian)

12. *Скворцова М. А.* Оценки решений в модели хищник-жертва с запаздыванием // Известия Иркутского государственного университета. Серия "Математика". — 2018. — Т. 25. — С. 109–125.

Skvortsova M. A. (2018). Estimates for solutions in a predator-prey model with delay. The Bulletin of Irkutsk State University, Series "Mathematics", 25, 109–125. (in Russian)

13. *Скворцова М. А.* Об оценках решений в модели хищник-жертва с двумя запаздываниями // Сибирские электронные математические известия. — 2018. — Т. 15. — С. 1697–1718.

Skvortsova M. A. (2018). On estimates of solutions in a predator-prey model with two delays. Siberian Electronic Mathematical Reports, 15, 1697–1718. (in Russian)

14. *Скворцова М. А.* Асимптотические свойства решений в модели взаимодействия популяций с несколькими запаздываниями // Математические заметки СВФУ. — 2019. — Т. 26, № 4. — С. 63–72.

Skvortsova M. A. (2019). Asymptotic properties of solutions in a model of interaction of populations with several delays. Mathematical Notes of North-Eastern Federal University, 26, No. 4, 63–72. (in Russian)

15. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Пер. с англ. — М.: Мир, 1970.

Hartman Ph. (1964). Ordinary differential equations. New York, London, Sydney: John Wiley & Sons.

16. *Хусаинов Д. Я., Иванов А. Ф., Кожаметов А. Т.* Оценки сходимости решений линейных стационарных систем дифференциально-разностных уравнений с постоянным

запаздыванием // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т. 41, № 8. — С. 1137–1140.

Khusainov D. Ya., Ivanov A. F., Kozhametov A. T. (2005). Convergence estimates for solutions of linear stationary systems of differential-difference equations with constant delay. Differential Equations, 41, No. 8, 1196–1200.

17. *Ыскак Т.* Об устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2019. — Т. 22, № 3. — С. 118–127.

Yskak T. (2019). On the stability of systems of linear differential equations of neutral type with distributed delay. Journal of Applied and Industrial Mathematics, 13, No. 3, 575–583.

18. *Demidenko G. V.* (2009). Stability of solutions to linear differential equations of neutral type. Journal of Analysis and Applications, 7, No. 3, 119–130.

19. *Mondié S., Kharitonov V. L.* (2005). Exponential estimates for retarded time-delay systems: LMI approach. IEEE Transactions on Automatic Control, 50, No. 2, 268–273.

20. *You H., Yuan R.* (2011). A stage-structured predator-prey model with two delays due to juvenile maturation. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 1–20.

Получена 25.10.2019

Динамические системы, 2019, том 9(37), №4, 390–409

УДК 517.957+517.312

Функционально-дифференциальные уравнения параболического типа с оператором инволюции

А. А. Корнута, В. А. Лукьяненко

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
Симферополь 295007. *E-mail: korn_ 57@mail.ru, art-inf@yandex.ru*

Аннотация. В работе рассматриваются важные для приложений нелинейной оптики математические модели в виде нелинейных функционально-дифференциальных уравнений параболического типа с обратной связью и преобразованием пространственных переменных (которое задаёт оператор инволюции). Свойство оператора инволюции (поворот, отражение) позволяет свести исходное уравнение к системе уравнений без преобразования пространственных переменных. Множество решений таких уравнений определяется двумя параметрами: малым — коэффициентом диффузии и большим —коэффициентом интенсивности потока. Уравнение задаётся на кольцевой области с условиями третьего рода в классе периодических функций. Исследуются важные частные случаи стационарных и нестационарных решений. Для стационарного решения, зависящего только от угловой координаты подробно исследуется характер точек покоя и их устойчивость. Многообразие решений частных уравнений наследуется и в общем случае. Найденные частные решения используются для построения асимптотических решений исходных уравнений. В работе приводятся соответствующие ссылки на публикации авторов.

Ключевые слова: оптические системы, нелинейные среды керровского типа, параболические нелинейные уравнения, оператор инволюции,устойчивость частных решений.

Functional-differential equations of parabolic type with the involution operator

A. A. Kornuta, V. A. Lukianenko

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007.

Abstract. In this work, mathematical models important for applications of nonlinear optics are considered in the form of nonlinear functional differential equations of parabolic type with feedback and a transformation of spatial variables (which defines the involution operator). The property of the involution operator (rotation, reflection) allows us to reduce the original equation to a system of equations without transforming the spatial variables. The set of solutions of such equations is determined by two parameters: a small one — diffusion coefficient and a large one — coefficient of flow intensity. The equation is given on a ring domain with conditions of the third kind in the class of periodic functions. Important special cases of stationary and non-stationary solutions are investigated. For a stationary solution that depends only on the angular coordinate, the nature of the stationary points and their stability are studied in detail. The variety of solutions of particular equations is also inherited in the general case. The particular solutions found are used to construct asymptotic solutions of the original equations. The work cites corresponding references to publications of the authors.

Keywords: optical systems, nonlinear Kerr type medium, parabolic nonlinear equations, involution operator, stability private solutions.
MSC 2010: 35K10, 35K55

Введение

Известно, что моделирование оптических систем, состоящих из тонкого слоя нелинейной среды керровского типа и различным образом организованного контура обратной связи, приводит к параболическим функционально-дифференциальным уравнениям с преобразованием аргументов искомой функции, что отражено монографиях [2, 3, 14, 17] и многочисленных публикациях.

Воздействие на нелинейную динамику системы, оказываемое внешним контуром обратной связи при помощи управляемого преобразования пространственных переменных, выполняемых призмами, линзами и другими устройствами, приводит к возникновению широкого спектра явлений нелинейной волновой динамики – многолепестковых и ротационных волн, оптических спиралей, волн переключения и др. [2, 21].

Используя специальную модель динамики внутрирезонаторного поля, которая учитывает дифракцию при свободном распространении поля в резонаторе в [7] предложена теоретическая модель, состоящая из уравнений, которые описывают временную динамику фазовой модуляции световой волны в нелинейной среде и комплексной амплитуды светового поля внутри резонатора с учетом дифракции. В результате численного моделирования по теоретической модели показано существование «собственных» пространственных структур резонатора.

Для произвольной области и произвольного невырожденного гладкого преобразования в [18] разработаны методы построения периодических решений. На основе теории бифуркации Андронова-Хопфа, например в [15], дано математическое обоснование наблюдаемых автоволновых явлений для преобразования поворота на фиксированный угол в круге или кольце. В [10, 14] показано, что при опредлённом выборе параметров в фазовом пространстве некоторой бесконечномерной динамической системы реализуется феномен буферности. В работах [4, 5] для исследования бифуркаций вращающихся структур в кольце и круге для случая поворота, а также в круге для преобразования поворота совместно с радиальным сжатием был использован метод центральных многообразий. Для описания динамики бегущих волн и медленно меняющихся структур параболического функционально-дифференциального уравнения с поворотом в [9] применяется метод квазинормальных форм.

Для нелинейного функционально-дифференциального уравнения параболического типа, моделирующего оптические системы с фурье-фильтром в контуре обратной связи в [16] доказано существование, единственность и непрерывная зависимость от входных данных решения начально-краевых задач в энергетическом классе, доказано существование оптимальных фурье-фильтров.

В работах [1, 19] исследована параболическая задача с преобразованием отражения пространственной переменной на круге, а также найдено асимптотическое представление решения линеаризованной и соответствующей нелинейной параболической задачи с использованием функции Грина и сведения к нелинейному интегральному уравнению относительно функции с преобразованием отражения.

Несмотря на обилие публикаций, остаётся ряд нерешенных вопросов. Необходима систематизация моделей, постановок задач по явлениям, структурам, зависимостям от параметров, областям, характеру обратной связи. Иерархия моделей задач для нелинейных параболических уравнений с обратной связью и преобразованием аргументов определяется характером решений(структур, явлений), имеющих аналоги в реальных прикладных задачах. Целью работы является исследование частных случаев нелинейного параболического уравнения с оператором инволюции [8], которые используются для асимптотического анализа уравнений.

1. Постановка задачи

Рассматривается параболическое функционально-дифференциальное уравнение в кольце S:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u = \mu \triangle u + K(1 + \gamma \cos Qu), \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad t \geq 0, \quad \mu > 0, \tag{1.1}$$

которое описывает динамику фазовой модуляции $u = u\,(r, \theta, t)$ световой волны, прошедшей тонкий слой нелинейной среды керровского типа, в оптической системе в контуре обратной связи [2, 17] с оператором инволюции Q, который обладает свойством $Q^m = I$ (например, с преобразованием поворота на угол $h = \frac{2\pi}{m}$), с условиями первого, второго или третьего рода на границе в зависимости от параметров a_1, a_2, b_1, b_2

$$\begin{aligned} a_1 \frac{\partial u(r_1, \theta, t)}{\partial r} + b_1 u(r_1, \theta, t) = g_1(\theta, t), \\ a_2 \frac{\partial u(r_2, \theta, t)}{\partial r} - b_2 u(r_2, \theta, t) = g_2(\theta, t), \end{aligned} \tag{1.2}$$

начальным условием

$$u\,(r, \theta, 0) = u_0\,(r, \theta) \tag{1.3}$$

и условием периодичности

$$u\,(r, \theta + 2\pi, t) = u\,(r, \theta, t)\,, \tag{1.4}$$

здесь $\triangle u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ – оператор Лапласа в полярной системе координат, $\mu > 0$ – коэффициент диффузии частиц нелинейной среды, Q – оператор поворота на угол $h = \frac{2\pi}{m}$ ($Q^m = I$ [8]), $K > 0$ – коэффициент, пропорциональный интенсивности входного поля, $\gamma (0 < \gamma < 1)$ – коэффициент видности (контрастности) интерференционной картины.

Лемма. *Пусть* $w = w(r, \theta, t)$ *– одно из решений задачи* (1.1) - (1.4), $u = w + v$, *где* $v = v(r, \theta, t)$ *– новая неизвестная функция. Тогда уравнение* (1.1) *относительно* v *примет вид*

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v = \mu \triangle v - K\gamma \sin Qw \cdot Qv + f(Qv, Qw), \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad t \geq 0, \tag{1.5}$$

$$f(Qw, Qv) = K\gamma \left(\cos Qw(\cos Qv - 1) - \sin Qw(\sin Qv - Qv)\right) \tag{1.6}$$

с условиями третьего рода на границе

$$\begin{aligned} a_1 \frac{\partial v(r_1, \theta, t)}{\partial r} + b_1 v(r_1, \theta, t) = 0, \\ a_2 \frac{\partial v(r_2, \theta, t)}{\partial r} - b_2 v(r_2, \theta, t) = 0, \end{aligned} \tag{1.7}$$

начальным условием

$$v\,(r, \theta, 0) = 0, \tag{1.8}$$

и условием периодичности

$$v\,(r, \theta + 2\pi, t) = v\,(r, \theta, t)\,. \tag{1.9}$$

Доказательство. Действительно, так как

$$\begin{aligned} \cos(w+v) = \cos w \cos v - \sin w \sin v = \\ = \cos w(\cos v - 1) - \sin w \sin v + \cos w, \end{aligned}$$

то выражение $K\left[1 + \gamma \cos Qu\right]$ примет вид:

$$\begin{gathered} K\left[1 + \gamma \cos Qu\right] = K[1 + \gamma \cos Q(w+v)] = \\ = K\left[1 + \gamma(\cos Qw(\cos Qv - 1) - \sin Qw \sin Qv + \cos Qw)\right] = \\ = K\left[1 + \gamma\left(\cos Qw(\cos Qv - 1) - \sin Qw(\sin Qv - Qv)\right. + \right. \\ \left.\left. +\ \cos Qw - \sin Qw \cdot Qv\right)\right] = \\ = K\left[1 + \gamma \cos Qw\right] - K\gamma \sin Qw \cdot Qv + \\ + K\gamma \left(\cos Qw(\cos Qv - 1) - \sin Qw(\sin Qv - Qv)\right) = \\ = K\left[1 + \gamma \cos Qw\right] - K\gamma \sin Qw \cdot Qv + f(Qw, Qv), \end{gathered}$$

где

$$f(Qw, Qv) = K\gamma \left(\cos Qw(\cos Qv - 1) - \sin Qw(\sin Qv - Qv)\right).$$

В предположении, что исследуется решения v в окрестности известной функции w, можно получить ряд модельных задач, сохраняя несколько членов разложения функций $f(Qw, Qv)$ в ряд по степеням v. Действительно, учитывая разложение $\cos v$ и $\sin v$ по степеням v, разложение нелинейной функции $f(Qv, Qw)$ в ряд по степеням v начинается с v^2 и $f(Qw, 0) = 0$:

$$f(Qw, Qv) = K\gamma \left[\cos Qw \left(-\frac{(Qv)^2}{2!} + \frac{(Qv)^4}{4!} - \frac{(Qv)^6}{6!} + \ldots + \right.\right.$$
$$\left. +(-1)^{n-1}\frac{(Qv)^{2(n-1)}}{(2(n-1))!} + \ldots\right) -$$
$$\left.-\sin Qw \left(-\frac{(Qv)^3}{3!} + \frac{(Qv)^5}{5!} - \frac{(Qv)^7}{7!} + \ldots + + (-1)^{n-1}\frac{(Qv)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots\right)\right].$$

□

В [11]-[13] рассматривались вопросы существования пространственно неоднородных решений задачи (1.1)-(1.4) для окружности ($r_1 = r_2$) в случае поворота на угол π и $\frac{\pi}{3}$ и квадрата, которые бифурцируют из пространственно однородного стационарного решения задачи (1.1)-(1.4) $w = const$. Используя метод Галёркина, проведено исследование асимптотической формы и устойчивости указанных решений.

Для задачи (1.1)-(1.4) на окружности были обнаружены метаустойчивые структуры, которые порождаются каскадами седло-узловых бифуркаций.

В работе исследуются решения задачи (1.1)-(1.4) в зависимости от предположений о решении w.

Возможны следующие частные случаи задачи, которые зависят от предполагаемого решения:

1) решение стационарное, равное постоянной: $u = w = const$;
2) решение стационарное, зависящее только от r: $u = w(r)$;
3) решение стационарное, зависящее только от θ: $u = w(\theta)$;
4) решение стационарное, зависящее от r и θ: $u = w(r, \theta)$;
5) нестационарное решение, зависящее только от t: $u = w(t)$;
6) нестационарное решение, зависящее от t и r: $u = w(r, t)$;
7) нестационарное решение, зависящее от t и θ: $u = w(\theta, t)$.

Исследование решения в окрестности одного из частных решений сводится к (1.5)-(1.9) относительно функции v. Заметим, что все решения можно исследовать в окрестности $w = const$.

2. Решения задачи в зависимости от предположений о решении

Пространственно однородное решение задачи (1.1)-(1.4) $w = const$ — определяется уравнением

$$w = K\left(1 + \gamma \cos w\right). \tag{2.1}$$

Число решений уравнения (2.1) зависит от параметров K и γ. При возрастании значения K, происходит увеличение числа решений. В пакете Wolfram

Mathematica построена бифуркационная диаграмма для (2.1) (см. рис. 1), из которой видно как возрастает число решений уравнения (2.1).

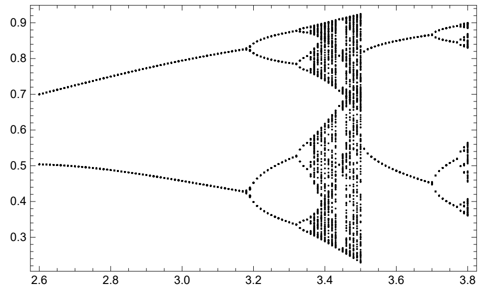


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма решений уравнения $w = K\,(1 + \gamma \cos w)$

В большинстве работ исследуется поведение решения задачи (1.1)-(1.4) в окрестности $w = const$ при условии, что $1 + K\gamma \sin\theta \neq 0$.

2.1. Решения, зависящие только от времени

Пусть $w = w(t)$, тогда $\Delta w = 0$ и получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dw}{dt} + w = K(1 + \gamma \cos w), w(0) = w_0. \tag{2.2}$$

Тогда решение (2.2) можно записать в виде [1]

$$\int\limits_{w_0}^{w} \frac{d\tau}{K\,(1 + \gamma \cos\tau) - \tau} = t + C.$$

При $t = 0$ значение $u(r, \theta, 0) = u_0(r, \theta)$, но так как $u = w(t)$ не зависит от r и θ, то $w(0) = const = w_0$. Следовательно, $C = 0$.

На рисунке 2 представлены графики решений уравнения (2.2) при $\gamma = 0,5$ и различных значениях K.

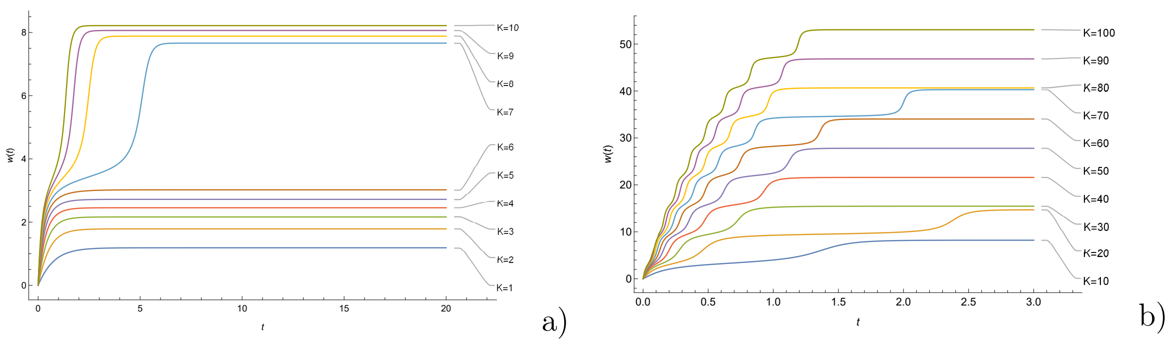


Рис. 2. Приближённые решения уравнения (2.2) при $\gamma = 0,5$: a) при $K = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$; b) при $K = 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100$.

2.2. Решения, зависящие от радиальной координаты

Рассмотрим решение уравнения (1.1)-(1.4), зависящее от радиальной переменной $w = w(r)$.

Для определения функции w получим уравнение второго порядка

$$\mu\left(w''(r) + \frac{w'(r)}{r}\right) - w(r) + K(1 + \gamma \cos w(r)) = 0. \tag{2.3}$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} a_1 w'(r_1) + b_1 w(r_1) &= g_1, \\ a_2 w'(r_2) - b_2 w(r_2) &= g_2. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Приближённые решения задачи (2.3)-(2.4) для $\mu = 0.1$, $\gamma = 0.5$, $K = 1, 2, 3, 4, 5, 10$ и различных краевых условий представлены на рисунках 3-5.

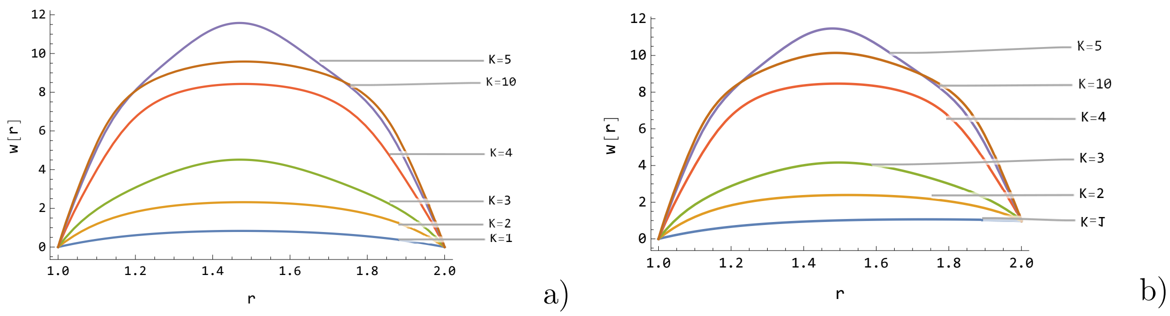


Рис. 3. Приближённые решение задачи (2.3)-(2.4) с краевыми условиями: a) $w(1) = 0$; $w(2) = 0$; b) $w(1) = 0$, $w(2) = 1$.

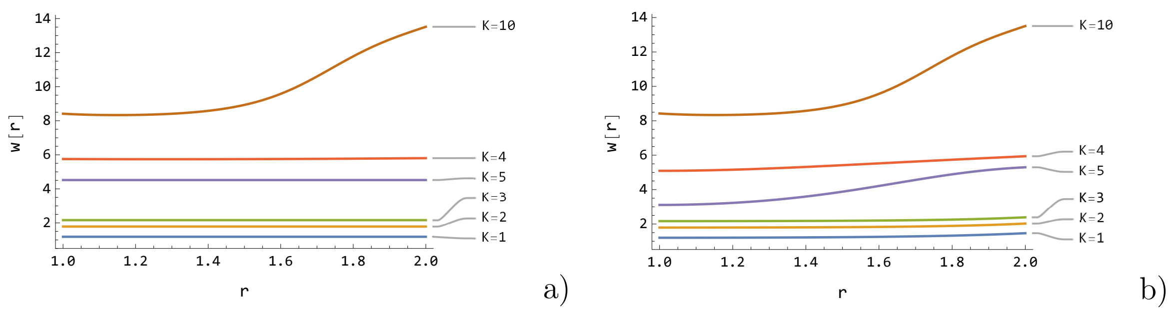


Рис. 4. Приближённые решение задачи (2.3)-(2.4) с краевыми условиями: a) $w'(1) = 0$; $w'(2) = 0$; b) $w'(1) = 0$, $w'(2) = 10$.

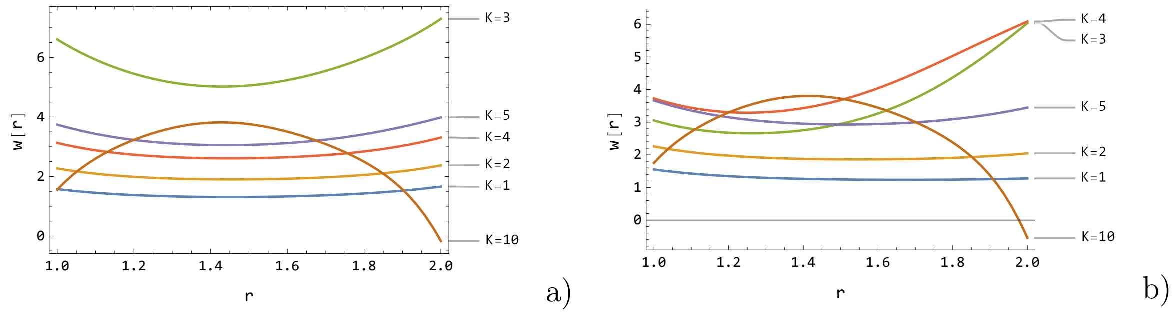


Рис. 5. Приближённые решение задачи (2.3)-(2.4) с краевыми условиями: a) $w(1) + w'(1) = 0$, $w(2) - w'(2) = 0$; b) $w(1) + w'(1) = 0$, $w(2) - w'(2) = 10$.

2.3. Решения, зависящие от угловой координаты

Пусть $w = w(\theta)$ – стационарное решение (1.1)-(1.4). Тогда функция $w = w(\theta)$ определяется уравнением

$$\mu w''(\theta) - w(\theta) + K(1 + \gamma \cos Qw(\theta)) = 0 \tag{2.5}$$

с условием периодичности

$$w(\theta + 2\pi) = w(\theta),$$

где $Qw = w(\theta + h)$ и $Q^m w = w$.

Решение уравнения (2.5) в зависимости от оператора Q может быть сведено к равносильной системе m дифференциальных уравнений второго порядка.

В частности, при $m = 2$ выполняется равенство $Q^2 w = w$. Обозначим $w_0 = w$, $Qw = Qw_0 = w_1$, $Q^2 w = w_0$ и перейдём к нормальной системе дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} w_0'' = \mu^{-1} \left(w_0 - K(1 + \gamma \cos w_1) \right), \\ w_1'' = \mu^{-1} \left(w_1 - K(1 + \gamma \cos w_0) \right). \end{cases} \tag{2.6}$$

Системе (2.6) можно сопоставить систему четырёх дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{gathered} w_0' = v_0, \;\; w_1' = v_1, \\ v_0' = \mu^{-1}(w_0 - K(1 + \gamma \cos w_1)), \;\; v_1' = \mu^{-1}(w_1 - K(1 + \gamma \cos w_0)), \end{gathered} \tag{2.7}$$

положения равновесия которой являются решениями системы уравнений

$$\mu^{-1}(w_0 - K(1 + \gamma \cos w_1)) = 0, \;\; \mu^{-1}(w_1 - K(1 + \gamma \cos w_0)) = 0, \;\; v_0 = 0, \;\; v_1 = 0. \tag{2.8}$$

Из (2.8) следует, что $K(1 - \gamma) < w_j < K(1 + \gamma)$, $j = 0, 1$.

На рисунке 6 для $\gamma = 0.5$ и значений $K = 1, 2, 3, 4, 5$ обозначены точками соответствующие приближённые решения системы (2.8) в плоскости переменных w_0, w_1 (например, точкой A обозначено приближённое решение для $K = 1$).

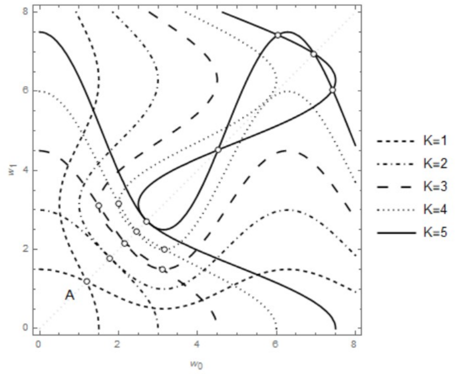
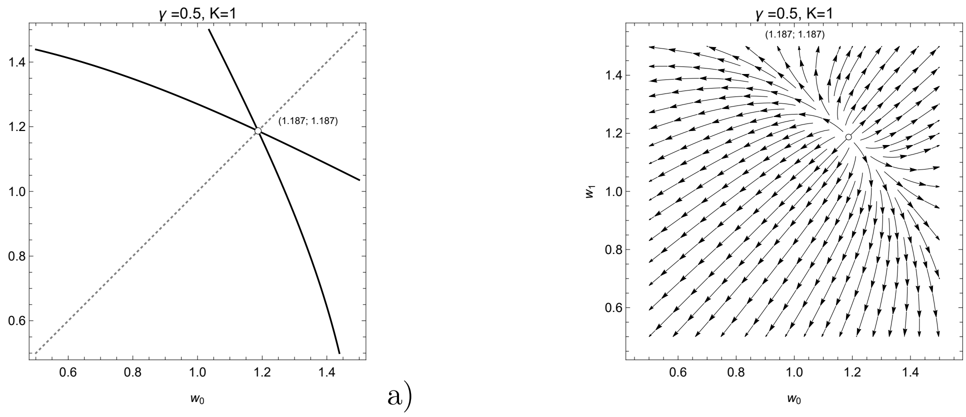


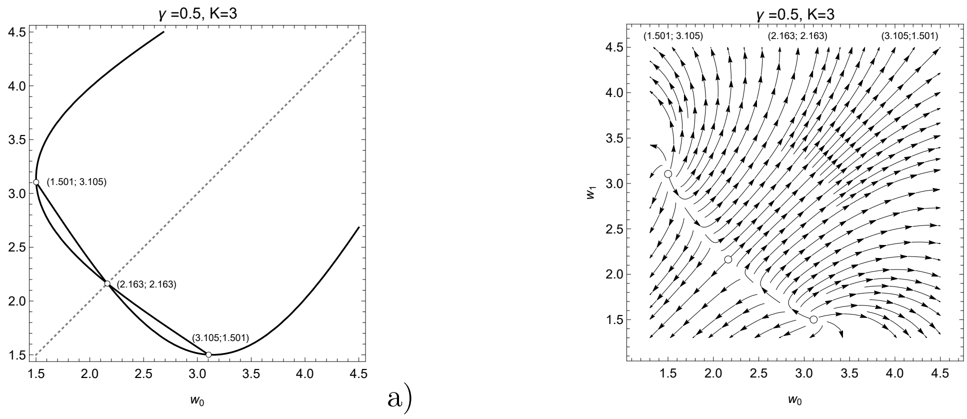
Рис. 6. Решения системы (2.8) при $\gamma = 0.5,\ K = 1, 2, 3, 4, 5$

На рисунках 7 a)-10 a) для $\gamma = 0.5$ и $K = 1, 3, 5, 10$ точками обозначены приближённые решения системы (2.8) в плоскости переменных w_0, w_1. На рисунках 7 b)-10 b) для $\gamma = 0.5$ и $K = 1, 3, 5, 10$ изображены фазовые траектории и положения равновесия системы (2.7).



a) b)

Рис. 7. Решение (a) и фазовый портрет (b) системы (2.8) при $\gamma = 0.5,\ K = 1$.



a) б)

Рис. 8. Решение (a) и фазовый портрет (b) системы (2.8) при $\gamma = 0.5,\ K = 3$.

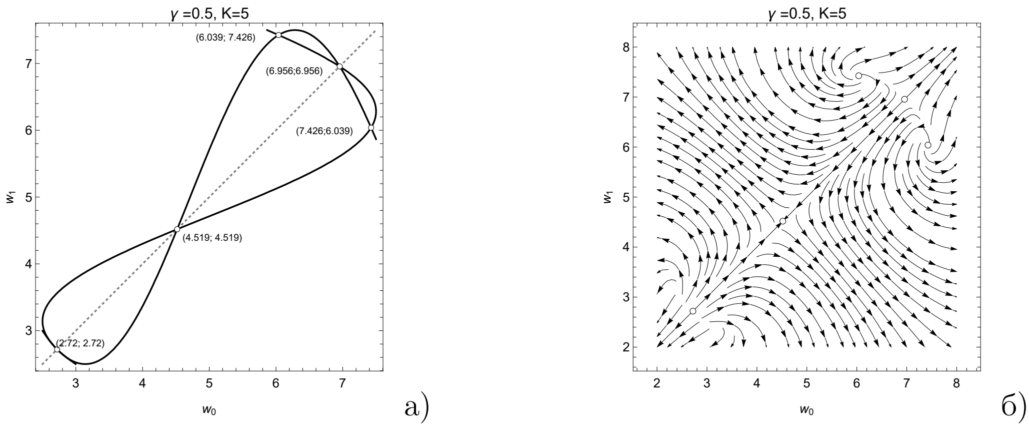


Рис. 9. Решение (a) и фазовый портрет (b) системы (2.8) при $\gamma = 0.5,\ K = 5$.

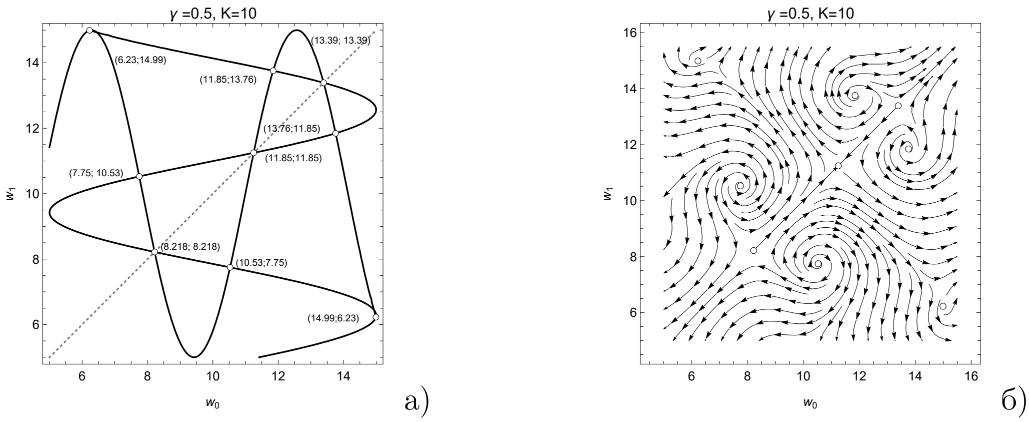


Рис. 10. Решение (a) и фазовый портрет (b) системы (2.8) при $\gamma = 0.5,\ K = 10$.

Устойчивость стационарных решений

Для исследования устойчивости положений равновесия системы (2.7), определяемых системой (2.8), составим матрицу линеаризации $J(v_0, v_1, w_0, w_1)$ в окрестности указанных положений равновесия:

$$J(v_0, v_1, w_0, w_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & K\gamma \sin w_1 \\ 0 & 0 & K\gamma \sin w_0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Её собственные значения

$$\lambda_{1,2} = 1, \quad \lambda_{3,4} = 1 \pm K\gamma\sqrt{\sin w_0 \sin w_1}. \tag{2.10}$$

Исходя из (2.7) для $w_0 \in (2\pi n, \pi + 2\pi n)$, $w_1 \in (2\pi n, \pi + 2\pi n)$ или $w_0 \in (\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n)$, $w_1 \in (\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{N}:$

$$\lambda_{3,4} = 1 \pm \sqrt[4]{(w_0 - \alpha)(\beta - w_0)(w_1 - \alpha)(\beta - w_1)}; \tag{2.11}$$

для $w_0 \in (2\pi n, \pi + 2\pi n)$, $w_1 \in (\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n)$ или $w_0 \in (\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n)$, $w_1 \in (2\pi n, \pi + 2\pi n)$:

$$\lambda_{3,4} = 1 \pm i\sqrt[4]{(w_0 - \alpha)(\beta - w_0)(w_1 - \alpha)(\beta - w_1)}, \tag{2.12}$$

где $\alpha = K(1 - \gamma)$, $\beta = K(1 + \gamma)$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *В системе* (2.7) *в плоскости переменных* w_0, w_1 *реализуются следующие состояния покоя: неустойчивый фокус, неустойчивый дикритический узел, седло и вырожденный случай, когда неустойчивые точки покоя заполняют некоторую прямую.*

Доказательство. Пусть (w_0^*, w_1^*) – положение равновесия системы (2.7) в плоскости переменных w_0, w_1. Обозначим $J^*(w_0, w_1)$ матрицу устойчивости:

$$J^*(w_0, w_1) = \begin{pmatrix} 1 & K\gamma \sin w_1 \\ K\gamma \sin w_0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

В зависимости от значений K, γ, w_0^*, w_1^* в плоскости переменных w_0, w_1 возможны следующие случаи.

1. Пусть $w_0^* = w_1^*$. Тогда собственные значения матрицы $J^*(w_0, w_1)$:

$$\lambda_{1,2}^* = 1 \pm K\gamma \sin w_0^*.$$

1.1. Если $w_0^* = \pi n$, $n \in \mathbb{N}$, то собственные значения матрицы $J^*(w_0, w_1)$ равны 1, следовательно, соответствующее положение равновесия есть неустойчивый дикритический узел.

Например, при $\gamma = 0,5$, $K = \dfrac{4\pi}{3}$ одна из особых точек имеет координаты $(2\pi; 2\pi)$ (см. рис. 11 a)). Собственные значения матрицы $J^*(w_0, w_1)$ в данной точке $\lambda_1^* = \lambda_2^* = 1$. Фазовые траектории исходят из особой точке каждая под своим собственным углом. Для всякого ненулевого вектора, приложенного к особой точке, существует единственная траектория, касающееся этого вектора (см. рис. 11 б)).

1.2. Если выполняются условия

$$K > 1, \quad \frac{1}{K} < \gamma < 1, \quad K - \sqrt{K^2\gamma^2 - 1} < w_0^* < K + \sqrt{K^2\gamma^2 - 1},$$

то собственные значения матрицы $J^*(w_0, w_1)$ действительные и имеют разные знаки, следовательно, особая точка является седлом.

Например, при $K = 3$, $\gamma = 0,5$ особая точка имеет координаты (2,16;2,16) (см. рис. 12 a)). Собственные значения матрицы $J^*(w_0, w_1)$ в данной точке имеют противоположные знаки: $\lambda_1^* = 2,24$, $\lambda_2^* = -0,24$. Вблизи особой точки, являющейся седлом по линейным членам, существуют две траектории, стремящиеся к особой точке, касаясь собственного вектора с отрицательным собственным значением, и ещё две траектории, стремящиеся к особой точке, касаясь собственного вектора с положительным собственным значением (см. рис. 12 b)).

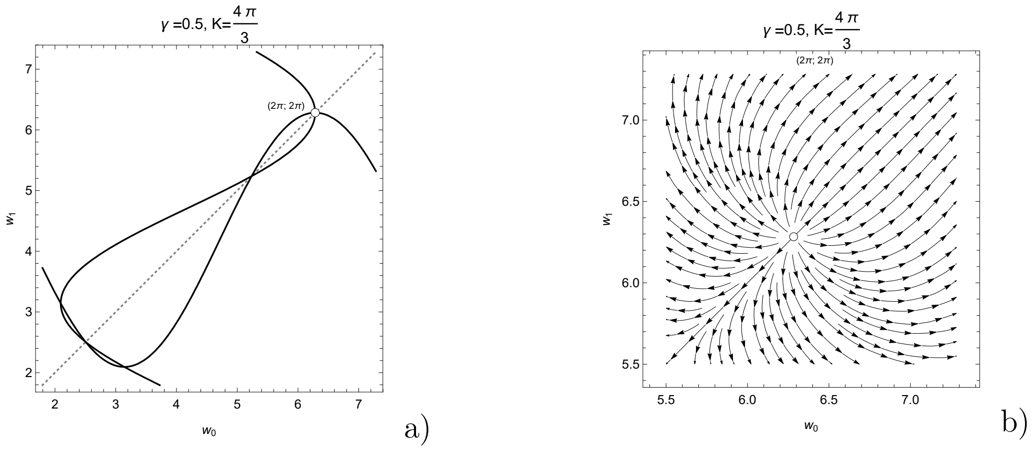


Рис. 11. (a) Особая точка $(2\pi; 2\pi)$ системы (2.7); (b) фазовые траектории системы (2.7) в окрестности особой точки $(2\pi; 2\pi)$ при $\gamma = 0.5,\ K = \frac{4\pi}{3}$.

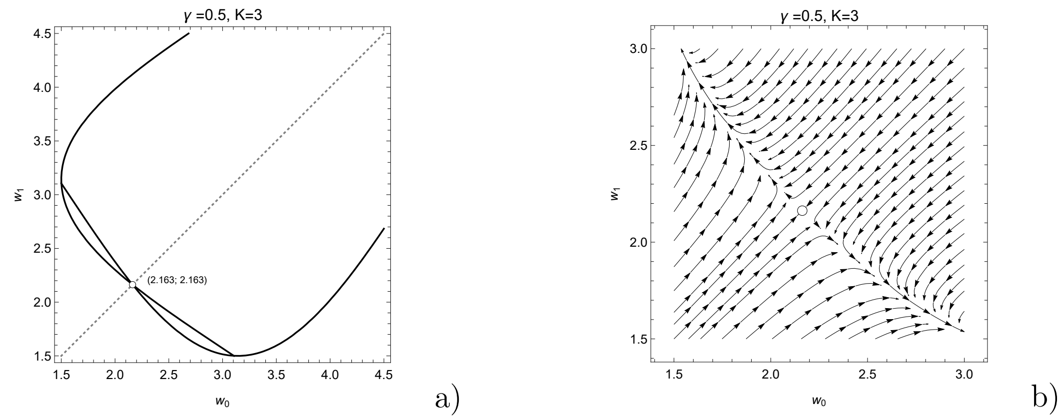


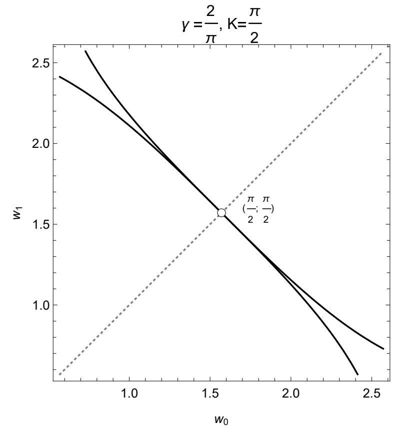
Рис. 12. (a) Особая точка $(2,16; 2,16)$ системы (2.7); (b) фазовые траектории системы (2.7) в окрестности особой точки $(2,16; 2,16)$ при $\gamma = 0.5,\ K = 3$.

1.3. Если при $K > 1$ выполняются условия

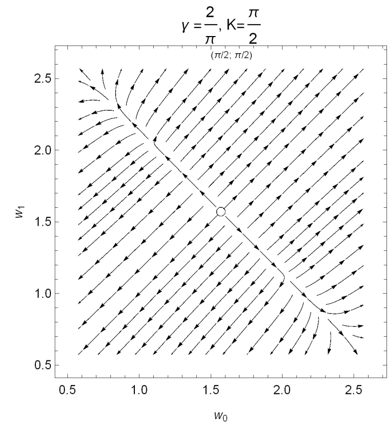
$$\gamma = \frac{1}{K}, \quad w_0^* = K - \sqrt{K^2\gamma^2 - 1} \quad \text{или} \quad \frac{1}{K} < \gamma < 1, \quad w_0^* = K \pm \sqrt{K^2\gamma^2 - 1},$$

то собственные значения матрицы $J^*(w_0, w_1)$ действительные различные, причём одно из них положительное, а второе равно нулю. Это означает, что в данном случае вся прямая, проходящая через данную точку и направленная вдоль собственного вектора, соответствующего нулевому собственному значению, состоит из точек равновесия. Фазовые траектории представляют собой лучи, параллельные второму собственному вектору, движение при этом происходит в направлении от прямой.

Например, при $\gamma = \dfrac{2}{\pi}$, $K = \dfrac{\pi}{2}$ собственные значения матрицы $J^*(w_0, w_1)$ в точке покоя $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ (см. рис. 13 a)) равны $\lambda_1^* = 2$, $\lambda_2^* = 0$. Фазовые траектории представлены на рисунке 13 b).



a)



b)

Рис. 13. (a) Особая точка $\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ системы (2.7); (b) фазовые траектории системы (2.7) в окрестности особой точки $\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ при $\gamma=\frac{2}{\pi}$, $K=\frac{\pi}{2}$.

1.4. Если при $K>1$ выполняется одна из систем неравенств:

$$0<\gamma<\frac{1}{K},\quad \alpha<w_0^*<\beta;$$

$$\gamma=\frac{1}{K},\quad \alpha<w_0^*<K-\sqrt{K^2\gamma^2-1}\quad \text{или}\quad K-\sqrt{K^2\gamma^2-1}<w_0^*<\beta;$$

$$\frac{1}{K}<\gamma<1,\quad \alpha<w_0^*<K-\sqrt{K^2\gamma^2-1}\quad \text{или}\quad K+\sqrt{K^2\gamma^2-1}<w_0^*<\beta,$$

где $\alpha=K(1-\gamma),\beta=K(1+\gamma)$, либо $0<K\leq 1$, то собственные значения матрицы $J^*(w_0,w_1)$ положительные и различные. Это означает, что положение равновесия является неустойчивым узлом. Фазовые траектории касаются прямой, которая направлена вдоль собственного вектора, соответствующего меньшему по абсолютной величине собственному значению.

Например, при $\gamma=0,5,\ K=0,5$ точка $(0,692;0,692)$ являются точкой покоя системы (2.7) (см. рис. 14 a)). Собственные значения матрицы A^* в окрестности данной точки равны $\lambda_1^*=0,84$, $\lambda_2^*=1,16$, следовательно, точка покоя — неустойчивый узел(см. рис. 14 b)).

2. Пусть $w_0^*\neq w_1^*$. Тогда собственные значения $\lambda_1^*=\lambda_3,\lambda_2^*=\lambda_4$, где λ_3,λ_4 определяются равенствами (2.10)-(2.12).

2.1. Если $w_0^*=\pi n$ или $w_1^*=\pi n$, $n\in\mathbb{N}$ то собственные значения матрицы $J^*(w_0,w_1)$ равны 1, следовательно, соответствующее положение равновесия есть неустойчивый дикритический узел.

Например, при $\gamma=0,5,\ K=\pi$ точки $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ и $\left(\pi;\frac{\pi}{2}\right)$ являются особыми точками (см. рис. 14 a)). Собственные значения матрицы $J^*(w_0,w_1)$ в окрестности каждой из них $\lambda_1^*=\lambda_2^*=1$. Фазовые траектории исходят из особой точке каждая

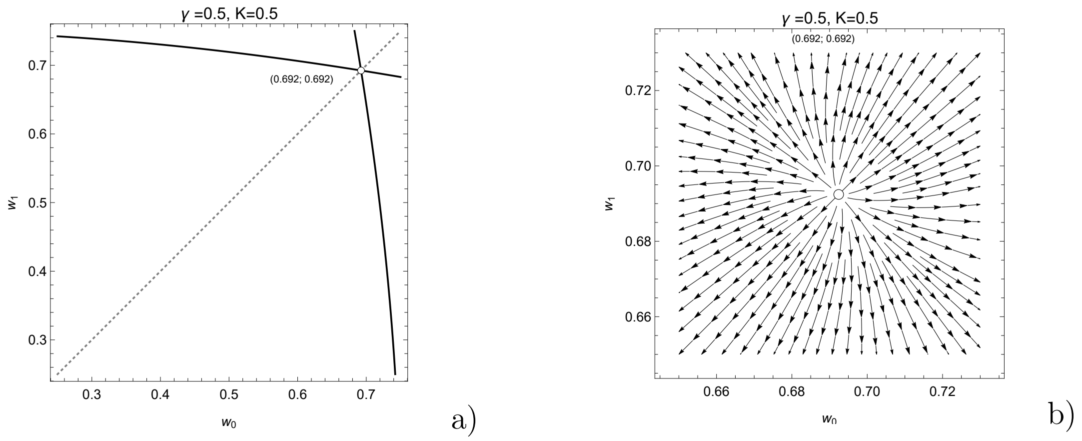


Рис. 14. (a) Особая точка $(0,692;0,692)$ системы (2.7); (b) фазовые траектории системы (2.7) в окрестности особой точки $(0,692;0,692)$ при $\gamma = 0,5,\ K = 0,5$.

под своим собственным углом. Для всякого ненулевого вектора, приложенного к особой точке, существует единственная траектория, касающееся этого вектора (см. рис. 14 b)).

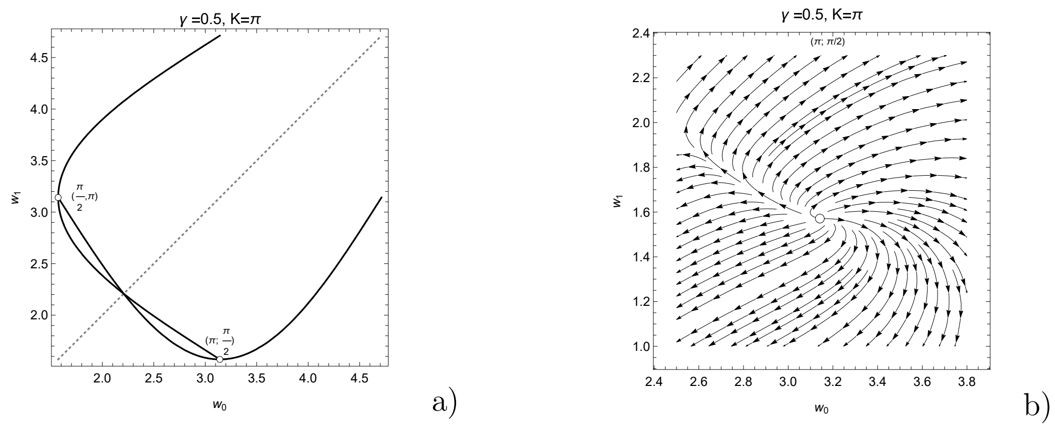
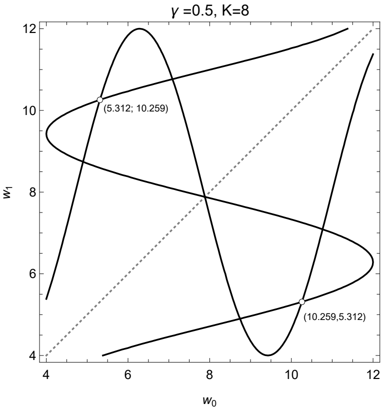


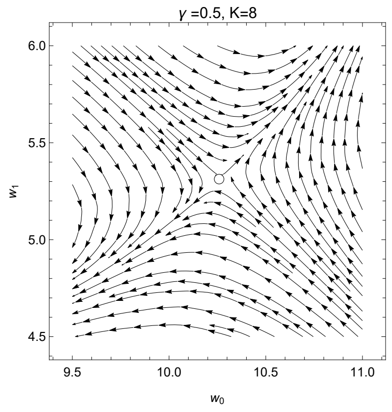
Рис. 15. (a) Особые точки $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, $\left(\pi;\frac{\pi}{2}\right)$ системы (2.7); (b) фазовые траектории системы (2.7) в окрестности особой точки $\left(\pi;\frac{\pi}{2}\right)$ при $\gamma = 0.5,\ K = \pi$.

2.2. Пусть w_0^* и w_1^* принадлежат $(2\pi n, \pi + 2\pi n)$ или $(\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда λ_1^* и λ_2^* определяются равенствами (2.11). Исходя из системы (2.8) и условия $K(1-\gamma) < w_{i,j} < K(1+\gamma)$, $i, j = 0, 1$, подкоренные выражения в (2.11) больше 1. Следовательно, собственные значения матрицы $J^*(w_0, w_1)$ имеют противоположные знаки. Это означает, что соответствующая точка покоя является седлом.

Например, при $K = 8$, $\gamma = 0,5$ собственные значения матрицы $J^*(w_0, w_1)$ в точках покоя $(10,26;5,31)$, $(5,31;10,26)$ (см. рис. 16 a)) $\lambda_1^* = 4,13$, $\lambda_2^* = -2,13$. Вблизи особой точки, являющейся седлом по линейным членам, существуют две траектории, стремящиеся к особой точке, касаясь собственного вектора с отрицательным собственным значением, и ещё две траектории, стремящиеся к особой точке, касаясь собственного вектора с положительным собственным значением (см. рис. 16 b)).



a)

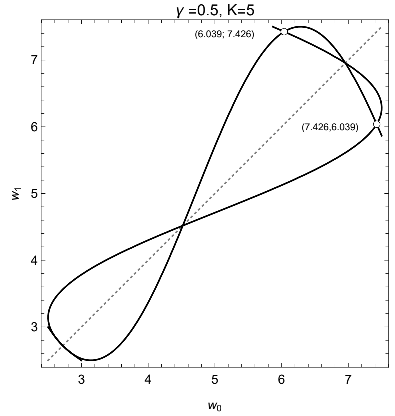


b)

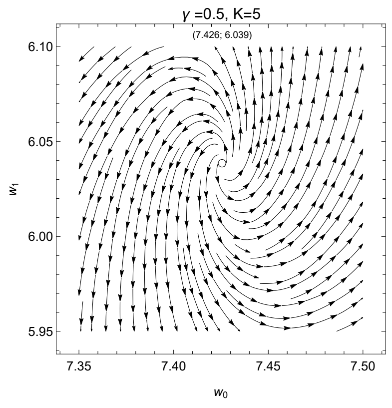
Рис. 16. (a) Особые точки $(5,312; 10,259)$, $(10,259; 5,312)$ системы (2.7); (b) фазовые траектории системы (2.7) в окрестности особой точки $(10,259; 5,312)$ при $\gamma = 0.5,\ K = 8$.

2.3. Пусть $w_0^* \in (2\pi n, \pi + 2\pi n)$, $w_1^* \in (\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n)$ или $w_0^* \in (\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n)$, $w_1^* \in (2\pi n, \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда λ_1^* и λ_2^* определяются равенствами (2.12). Тогда для любых допустимых значений параметров K и γ собственные значения матрицы $J^*(w_0, w_1)$ комплексные с положительной действительной частью, это означает, что соответствующие почки покоя будут неустойчивыми фокусами.

Например, при $K = 5$, $\gamma = 0,5$ одна из особых точек имеет координаты $(7,426; 6,049)$ (см. рис. 17 a)). Собственные значения матрицы $J^*(w_0, w_1)$ в данной точке $\lambda_{1,2}^* = 1 \pm i1,17$. Фазовые траектории представляют собой раскручивающиеся из особой точке спирали (см. рис. 17 b)).



a)



b)

Рис. 17. (a) Особые точки $(7,426; 6,049)$, $(6,049; 7,426)$ системы (2.7); (b) фазовые траектории системы (2.7) в окрестности особой точки $(7,426; 6,049)$ при $\gamma = 0.5,\ K = 5$.

Таким образом, в системе (2.7) реализуются следующие состояния покоя: неустойчивый дикритический узел, неустойчивый фокус, неустойчивый узел, седло и вырожденный случай, когда неустойчивые точки покоя заполняют некоторую прямую. □

2.4. Решения, зависящие от угловой координаты и от времени

Пусть $u = u(\theta, t)$ – решение (1.1)-(1.4). Тогда функция $u = u(\theta, t)$ определяется уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u = \frac{\mu}{r_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + K(1 + \gamma \cos Qu), \quad t > 0, \tag{2.14}$$

с начальным условием $u(\theta, 0) = u_0(\theta)$ и условием периодичности $u(\theta + 2\pi, t) = u(\theta, t)$, где $Qu = u(\theta + h, t)$.

В случае узкого кольца. т. е. $d = r_2 - r_1 << 1$ приходим к задаче на окружности с оператором Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ и коэффициентом диффузии $D = \frac{\mu}{r_0^2}$, где $r_1 < r_0 < r_2$, стационарный вариант которой исследован в п.2.3. Аналогично работе [13], получим соответствующую теорему для упрощённой модели задачи (1.5)-(1.9) относительно $u = u(\theta, t)$ и характера решений в окрестности стационарного решения $u = w = const$, $u = w + v$ при $v = \sqrt{\frac{6}{|\Lambda|}}U$, $\Lambda < -1$, $h = \pi$, $Qw = w$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U = D\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \Lambda Qu + \Omega(QU)^2 + (QU)^3, \quad t > 0, \tag{2.15}$$

где $QU = U(\theta + \pi, t)$, $\Lambda = -K\gamma \sin w$, $\Omega = -\sqrt{\frac{3|\Lambda|}{2}} ctg w$.

Теорема 2. *Пусть* $\Lambda < -1$*, тогда существует* $\delta > 0$*, такое что для любых значений параметра* D *удовлетворяющих неравенству* $-\Lambda - 1 - \delta < D < -1 - \Lambda$*, существует решение* $\varphi_1(\theta, \mu)$ *уравнения* (2.15)*, определяемое равенством*

$$\varphi_1(\theta, D) = (z\cos\theta + z^2\sigma_2(\theta, D) + z^3\sigma_3(\theta, D) + z^4\sigma_4(\theta, D) + \\ + z^5\sigma_5(\theta, D) + r(z, \theta, D))\,|_{z=z(D)},$$

где

$$\sigma_2 = \frac{\Omega}{2}\left(\frac{1}{1 - \Lambda + 2\lambda_1} + \frac{\cos 2\theta}{2\lambda_1 - \lambda_2}\right), \quad \sigma_3 = -\frac{\xi}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)(3\lambda_1 - \lambda_3)}\cos 3\theta,$$

$$\sigma_4 = \frac{\Omega}{2(1 - \Lambda + 4\lambda_1)}\left(\frac{5\Omega^2}{2(1 - \Lambda + 2\lambda_1)^2} + \frac{\zeta}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)^2}\right) + \\ + \frac{\Omega}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_2)}\left(\frac{3\xi}{2(1 - \Lambda + 2\lambda_1)} - \frac{\xi}{2(3\lambda_1 - \lambda_3)} + \frac{\zeta}{2\lambda_1 - \lambda_2}\right)\cos 2\theta + \\ + \frac{\Omega}{4(2\lambda_1 - \lambda_2)(4\lambda_1 - \lambda_4)}\left(\frac{\zeta}{2(2\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{\xi}{3\lambda_1 - \lambda_3}\right)\cos 4\theta,$$

$$\sigma_5 = \frac{1}{2(2\lambda_1-\lambda_2)(5\lambda_1-\lambda_3)}\Bigg[\Bigg(-\frac{3\Omega^2}{8(2\lambda_1-\lambda_2)}-\frac{3\Omega^2}{2(1-\Lambda+2\lambda_1)}-$$
$$-\frac{3\xi\Omega^2}{2(1-\Lambda+2\lambda_1)(4\lambda_1-\lambda_2)}-\frac{\xi\Omega^2}{(1-\Lambda+2\lambda_1)(3\lambda_1-\lambda_3)}-$$
$$-\frac{\zeta\Omega^2}{(2\lambda_1-\lambda_2)(4\lambda_1-\lambda_2)}+\frac{\xi\Omega^2}{2(4\lambda_1-\lambda_2)(3\lambda_1-\lambda_3)}+\frac{\xi\Omega^2}{2(3\lambda_1-\lambda_3)(4\lambda_1-\lambda_4)}-$$
$$-\frac{3\xi\Omega^2}{4(2\lambda_1-\lambda_2)(3\lambda_1-\lambda_3)}-\frac{\zeta\Omega^2}{4(2\lambda_1-\lambda_2)(4\lambda_1-\lambda_4)}-\frac{3\xi}{8(3\lambda_1-\lambda_3)}\Bigg)\cos 3\theta+$$
$$+\frac{1}{2}\Bigg(\frac{3\Omega^2}{4(2\lambda_1-\lambda_2)}-\frac{3\zeta}{4(3\lambda_1-\lambda_3)}+\frac{\xi\Omega^2}{(2\lambda_1-\lambda_2)(3\lambda_1-\lambda_3)}-$$
$$-\frac{\zeta\Omega^2}{2(2\lambda_1-\lambda_2)(4\lambda_1-\lambda_4)}+\frac{\xi\Omega^2}{(3\lambda_1-\lambda_3)(4\lambda_1-\lambda_4)}\Bigg)\cos 5\theta\Bigg],$$

здесь $r(z,\theta,D) = O(|z|^5)$, $z(D) > 0$*—непрерывная ветвь стационарных точек уравнения,* $\xi = 2\Omega^2 + (2\lambda_1-\lambda_2)$, $\zeta = \Omega^2 + 3(2\lambda_1-\lambda_2)$, $\lambda_k = -\mu k^2 - 1 + (-1)^k\Lambda$, $k = 1, 2, \ldots$

$$\dot z = \lambda_1(D)z + \left[-\frac{3}{4}-\frac{\Omega^2}{\Lambda-1+2\lambda_1}-\frac{\Omega^2}{2\,(2\lambda_1-\lambda_2)}\right]z^3+$$
$$+\Bigg[\frac{5\Omega^4}{2(\Lambda-1+2\lambda_1)^2(\Lambda-1-4\lambda_1)}-\frac{3\Omega^2}{4(\Lambda-1+2\lambda_1)(2\lambda_1-\lambda_2)}-$$
$$-\frac{3\Omega^2}{4(\Lambda-1+2\lambda_1)^2}-\frac{3\Omega^2}{8(2\lambda_1-\lambda_2)^2}+\frac{\Omega^2\zeta}{4(\Lambda-1-4\lambda_1)(2\lambda_1-\lambda_2)^2}-$$
$$-\frac{\Omega^2\zeta}{(\Lambda-1-2\lambda_1)(\Lambda-1-4\lambda_1)(2\lambda_1-\lambda_2)}-\frac{\Omega^2\zeta}{2(2\lambda_1-\lambda_2)^2(4\lambda_1-\lambda_2)}+$$
$$+\frac{3\Omega^2\xi}{(\Lambda-1-2\lambda_1)(2\lambda_1-\lambda_2)(4\lambda_1-\lambda_2)}+\frac{3\xi}{16(2\lambda_1-\lambda_2)(3\lambda_1-\lambda_3)}+$$
$$+\frac{\Omega^2\xi}{4(2\lambda_1-\lambda_2)(4\lambda_1-\lambda_2)(3\lambda_1-\lambda_3)}+\frac{\Omega^2\xi}{8(2\lambda_1-\lambda_2)^2(3\lambda_1-\lambda_3)}\Bigg]z^5$$

Решение $\varphi_1(\theta, D)$ *— экспоненциально устойчиво.*

Заключение

В работе получены решения для частных случаев нелинейного параболического уравнения с оператором инволюции, который соответствует преобразованию пространственных переменных. Такие уравнения возникают в нелинейной оптике при моделировании прохождения потока через нелинейную среду керровского типа в контуре с обратной связью и преобразованием пространственных координат. Исследована устойчивость многообразия точек покоя для стационарного случая уравнения, зависящего от угловой переменной в задаче для кругового кольца.

Для этого случая доказана реализация следующих состояний покоя: неустойчивого дикритического узла, неустойчивого фокуса,неустойчивого узла, седла и вырожденного случая, когда неустойчивые точки покоя заполняют некоторую прямую.

В работе приведено преобразованное уравнение в окрестности рассмотренных частных решений, которые используются для дальнейшего исследования исходного уравнения. В частности, для уравнения, зависящего от угловой координаты и времени получено асимптотическое представление решения в окрестности стационарного решения $w = const$ с оператором инволюции $Q : Q^2 = I$ (поворот на угол $h = \pi$).

Список цитируемых источников

1. *Аль-Андари, Д. С., Лукьяненко, В. А.* Нелинейные параболические уравнения с преобразованием аргумента // Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование: сборник научных трудов МИКМО-2019. — 2019. — Вып.1, №1. — С. 4–13.

   Al-Andari, D. S., Lukianenko, V. A. (2019). Nonlinear Parabolic Equations with Argument Conversion [in Russian]. MIKMO, 1:1, 4–13.

2. *Ахманов С. А., Воронцов М. А., Иванов В. Ю.* Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей // Новые принципы оптической обработки информации/ Под ред. С. А. Ахманова, М. А. Воронцова. — М: Наука, 1990. — С. 263—325.

   Akhmanov, S. A., Vorontsov, M. A., Ivanov, V. Yu. (1990). Generation of structures in optical systems with two-dimensional feedback [in Russian]. In S. A. Akhmanov, M. A. Vorontsov (Eds.), New Physical Principles of Optical Information Processing (pp. 263–325). Moscow: Nauka.

3. *Ахромеева, Т. С., Курдюмов, С. П., Малинецкий, Г. Г., Самарский, А. А.* Структуры и хаос в нелинейных средах. — М.: Физматлит, 2007. — 485 с.

   Akhromeeva, T. S., Kyurdyumov, S. P., Malinetskii, G. G., Samarskii, A. A. (2005).Structures and Chaos in Nonlinear Media [in Russian]. Moscow: Fizmatlit.

4. *Белан, Е. П.* О взаимодействии бегущих волн в параболическом функционально-дифференциальном уравнении //Дифференц. уравнения. — 2004. — Т.40, №5. — С. 645-654.

   Belan, E. P. (2004). On the interaction of running waves in a parabolic functional differential equation [in Russian]. Differ. Edu., 40:5, 645–654.

5. *Белан, Е. П., Лыкова, О. Б.* Бифуркации вращающихся структур в параболическом уравнении с преобразованием поворота пространственной переменной // Динамические системы. — 2008. — Вып.25. — С. 3–16.

   Belan, E. P., Lykova, O. B. (2008). Bifurcations of rotating structures in a parabolic equation with shift transformation of a spatial variable [in Russian]. Din. Sist., 25, 3–16.

6. *Белан, Е. П.* Динамика стационарных структур в параболической задаче с отражением пространственной переменной // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — №5. — С. 99–111.

Belan, E. P. (2010). Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflected spatial argument [in Russian]. Cybern. Syst. Anal., 46, 772–783.

7. *Иванов, В. Ю., Иванова, И. Б.* Фазовые структуры в нелинейном кольцевом резонаторе // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. — 2016. — №3. — С. 48–53.

   Ivanov, V. Ju., Ivanova, I. B. (2016). Phase patterns in a nonlinear ring resonator [in Russian]. Moscow University Physics Bulletin, 71, 266-271.

8. *Карапетянц, Н. К., Самко, С. Г.* Уравнения с инволютивными операторами и их приложения. — Ростов н/Д: Изд-во Рост. ун-та, 1988. — 187 с.

   Karapetiants, N., K., & Samko, S. G. (2001). Equations with Involutive Operators [in Russian]. Basel: Birkhäuser.

9. *Кащенко, С. А.* Асимптоматика пространственно неоднородных структур в когерентных нелинейно-оптических системах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1994. — Т.31, №3. — С. 467–473.

   Kashchenko, S. A. (1994). Asymptotics of spatially heterogeneous structures in coherent nonlinear-optical systems [in Russian]. Comput. Math. Math. Phys., 31:3, 467–473.

10. *Колесов, А. Ю., Розов, Н. Х.* Оптическая буферность и механизмы ее возникновения // Теоретическая и математическая физика. — 2004. — Т.140, №1. — С. 14–28.

    Kolesov, A. Yu., Rozov, N. Kh. (2004). Optical buffering and mechanisms of its occurrence [in Russian]. Theoret. and Math. Phys., 140:1, 14-28.

11. *Корнута, А. А.* Метаустойчивые структуры в параболическом уравнении с поворотом пространственной переменной // Динамические системы. — 2014. — Т.4 (32), №1–2. — С. 59–75.

    Kornuta, A. A. (2014). Metastable structures in a parabolic equation on a circle with rotation of a space variable [in Russian]. Din. Sist., 4:32. 59–75.

12. *Корнута, А. А.* Динамика стационарных структур в параболической задаче с преобразованием отражения // Таврический Вестник Информатики и Математики. — 2015. — №1 (28). — С. 49–61.

    Kornuta, A. Ф. (2015).Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflection transformation [in Russian]. Tavrichesky Vestnik Inf. i Mat., 1:28, 49-61.

13. *Корнута, А. А.* Стационарные структуры в параболической задаче с преобразованием поворота на окружности // Динамические системы. — 2016. — Т.6 (34), №4. — С. 311–322.

    Kornuta, A. A. (2016). Stationary structures in a parabolic problem with rotation rotation on a circle [in Russian]. Din. Sist., 6:4. 311–322.

14. *Мищенко, Е. Ф., Садовничий, В. А., Колесов, А. Ю., Розов, Н. Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. — М.: Физматлит, 2005. — 430 с.

    Mishchenko, E., F., Sadovnichii, V. A., Kolesov, A. Yu., Rozov, N. Kh. (2005). Autowave processes in nonlinear media with diffusion [in Russian]. Moscow: Fizmatgiz.

15. *Разгулин, А. В.* Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1993. — Т.33, №1. — С. 69–80.

Razgulin, A. V. (1993). Self-excited oscillations in the nonlinear parabolic problem with transformed argument [in Russian]. Comput. Math. Math. Phys., 33:1, 69-80.

16. *Разгулин, А. В., Чушкин, В. А.* О задаче оптимальной Фурье-фильтрации для одного класса моделей нелинейных оптических систем с обратной связью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2004. — Т.44, №9. — С. 1608–1618.

    Razgulin, A. V. Chushkin, V. A. (2004). On the problem of optimal Fourier filtering for a class of models of nonlinear optical systems with feedback [in Russian]. Comput. Math. Math. Phys., 44:9, 1608-1618.

17. *Разгулин, А. В.* Нелинейные модели оптической синергетики. — М: МАКС Пресс, 2008. — 203 с.

    Razgulin, A. V. (2008). Nonlinear Models of Optical Synergetics [in Russian]. Moscow: MAKS Press.

18. *Скубачевский, А. Л.* О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. — 1998. — Т.34, №10. — С. 1394–1401.

    Skubachevsky, A. L. (1998). On the Hopf bifurcation for a quasilinear parabolic functional-differential equation [in Russian]. Differ. Equ., 34:10, 1395–1402.

19. *Хазова, Ю. А., Лукъяненко, В. А.* Применение интегральных методов для исследования одной параболической задачи // Известия вузов. ПНД. — 2019. — Т.27, №4. — С. 85–98.

    Hazova, J. A., Lukyanenko, V. A. (2019). The use of integral methods to study one parabolic problem [in Russian]. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics, 27:4, 85-98.

20. *Чушкин, В. А., Разгулин, А. В.* Стационарные структуры в функционально- дифференциальном уравнении диффузии с отраженным аргументом // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. — 2003. — №2. — С. 13–20.

    Chushkin, V. A., Razgulin, A. V. (2003). Steady-state structures in a functional-differential diffusion equation with reflection of the spatial argument [in Russian]. Mosc. Univ. Comput. Math. Cybern., 2, 13-20.

21. *Vorontsov, M., Iroshnikov, N., Abernathy, R* Diffractive patterns in a nonlinear-optical 2-dimensional feedback-system with field rotation [in English] // Chaos, Solitons and Fractals. — 1994. — V.4, №8–9. — C. 1701–1716.

Получена 15.10.2019

Динамические системы, 2019, том 9(37), №4, 410–427

УДК 621.391

Метод ортогонализации и его применение в теории связи

А. Н. Дегтярев

Севастопольский государственный университет,
Севастополь, 299053. *E-mail: degtyaryov1966@yandex.ru*

Аннотация. Рассматривается метод ортогонализации, основанный на определении веса ортогональности. Указанный вес может быть знакопеременной функцией. Непротиворечивость метода известным положениям показана на примере полиномов Чебышева и Эрмита. Получены ортогональные с весом системы эквидистантных функций. Показано, что базис, составленный из смещенных на кратные интервалы времени импульсных характеристик физически реализуемых линейных систем, является квазиортогональным. Установлено, что преобразование нормированного фильтра-прототипа в фильтры нижних частот и в полосовые фильтры с заданными характеристиками не нарушает ортогональность базисных функций. Показано, что использование базиса, составленного из импульсных характеристик линейных систем позволяет снизить уровень межканальных и межсимвольных помех при передаче сообщений по каналам связи.

Ключевые слова: метод ортогонализации, системы ортогональных функций, помехоустойчивость систем передачи информации.

Orthogonalization method and its application in communication theory

A. N. Degtyaryov

Sevastopol State University, Sevastopol 299053.

Abstract. The analysis of the reasons leading to the emergence of intersymbol and interchannel interference in information transmission systems is carried out. It is shown that the indicated interference occurs due to the fact that physically realizable elementary signals with the help of which information is transmitted are not orthogonal. It is established that, within the framework of the existing communication theory, the considered interference can not be simultaneously eliminated. It is shown that the known methods for obtaining systems of orthogonal functions do not satisfy the requirements for systems of physically realizable functions that approximate elementary signals. An orthogonalization method based on determining the weight of orthogonality is proposed. The peculiarity of the method is that it does not distort the shape of the original functions. The indicated weight may be an alternating function. The condition that the norm of functions is non-negative follows from the conditions of orthogonality. The concept of weight energy is introduced. It is shown that a weight satisfying the minimum energy condition is a quadratic form of orthogonalizable functions. The consistency of the method to the well-known propositions is shown by the example of chebyshev and hermite polynomials. It is shown that the weight functions known for classical orthogonal polynomials satisfy the condition of minimum weight energy. We obtained systems of equidistant functions that are orthogonal with weight, consisting of reference functions raised to an integer degree. For the transmission of messages, it is proposed to use the impulse response of physically realizable linear systems that are offset by multiple time intervals. It is shown that a basis composed of such functions

is quasi-orthogonal. Quasi-orthogonality consists in the fact that the conditions of orthogonality can be strictly fulfilled only if the number of initial functions is equal to the order of the linear system. For the remaining equidistant functions, the orthogonality condition is satisfied with an error sufficient for practice. It is established that the conversion of the normalized prototype filter into lower-pass filters and into band-pass filters with specified characteristics does not violate the orthogonality of the basis functions. To evaluate the accuracy of representing signals in the form of orthogonal series, two criteria are proposed. One criterion is used to approximate the transmitted signal side by side, and the second – for the receiver to make a decision about the values of the coefficients of the series. Analytical dependences of the probability of error when receiving a message symbol for the case of transmission of information by opposite signals are obtained. It is shown that the use of a basis composed of equidistant biased impulse characteristics of linear systems can reduce the level of interchannel and intersymbol interference when transmitting mes-sages over communication channels.
Keywords: orthogonalization method, systems of orthogonal functions, noise immunity of information transmission systems.
MSC 2010: 42C05

Введение

В большинстве высокоэффективных цифровых систем передачи информации (спутниковые, радиорелейные и кабельные системы) дисперсия случайной межсимвольной интерференции (МСИ) или случайной межканальной помехи (МКП) существенно превышает мощность шума в канале связи.

МСИ обусловлена наложением во времени откликов линейных устройств каналоформирующего оборудования (КО) на различные элементарные сигналы, несущие информацию о передаваемых символах, в результате чего на расшифровку одного символа оказывают влияние несколько предыдущих, а в каналах с большим групповым временем запаздывания еще и последующих символов. МСИ также возникает в результате многолучевого распространения радиоволн.

Причиной МКП является проникновение на выход КО одного канала сигналов соседних каналов из-за перекрытия по частоте амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) фильтров КО каналов.

В [1] показано, что полное устранение МСИ при одновременной минимизации дисперсии аддитивного шума достигается, если приемный фильтр состоит из каскадного соединения фильтра, согласованного с принимаемым сигналом, и трансверсального фильтра (эквалайзера), содержащего бесконечное число отводов с соответствующими весовыми коэффициентами.

Линия задержки физически реализуемого эквалайзера имеет конечное число отводов и, следовательно, полностью устранить МСИ невозможно. На практике производится оптимизация эквалайзера по критериям минимума пикового значения МСИ или минимума среднеквадратического значения МСИ [1]. В общем случае оптимальный по указанным критериям эквалайзер не является оптимальным по критерию минимума вероятности ошибки, т.к. он нарушает условие согласованности приемного фильтра с сигналом.

Наряду с линейной обработкой сигнала для компенсации МСИ в отсчетные моменты времени используют и нелинейную обработку, в частности, прием с обратной связью по решению [2]. На основе решений о переданных сигналах и сведений об отклике тракта формируется сигнал, компенсирующий МСИ за счет предыдущих символов. Этому методу присуще явление размножения ошибок.

Если последующие символы создают значительный уровень МСИ, то линейная и нелинейная обработки используются совместно [2].

В системах с неизменными во времени параметрами приемопередающего тракта линейный выравниватель в виде трансверсального фильтра предусматривается в модуляторе [9].

Если параметры тракта в процессе эксплуатации подвержены изменениям, то его характеристики должны периодически подстраиваться. Такая подстройка осуществляется использованием на приеме адаптивной коррекции тракта [2].

Снижение уровня межсимвольной интерференции, возникающей в результате многолучевого распространения радиоволн, достигается путем адаптивной коррекции тракта, а также применением пространственно-временной селективности сигналов [3]. Отметим, что данный тип МСИ по своему влиянию на качество принимаемого сообщения аналогичен повторной помехе.

Снижение уровня МКП достигается повышением избирательности КО и введением защитного частотного интервала между соседними каналами связи.

Одновременное снижение уровней МСИ и МКП в рамках существующей теории невозможно. При снижении уровня МСИ повышается уровень МКП и наоборот. На практике приходится искать параметры КО, оптимальные по критерию минимальной суммарной ошибки, обусловленной действием МСИ, МКП и шума в канале связи.

Невозможность одновременного снижения уровней МСИ и МКП обусловлена принятой в современной теории связи, основы которой разработаны К. Шенноном и В. А. Котельниковым, моделью передаваемого по каналу связи сигнала.

Так, в цифровых системах связи и передачи информации непрерывный сигнал источника сообщения конкретизируется по времени и преобразуется в цифровой код, которым осуществляется модуляция несущего колебания.

Дискретизация непрерывного сигнала производится в соответствии с теоремой отсчетов, доказанной В. А. Котельниковым.

Теорема отсчетов [4]. Сигнал $s(t)$, ограниченный по спектру наивысшей частотой $\omega_m = 2\pi f_m$, может быть представлен рядом

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s\left(\frac{n}{2f_m}\right) \frac{\sin \omega_m \left(t - \frac{n}{2f_m}\right)}{\omega_m \left(t - \frac{n}{2f_m}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n\Delta t) \sin c\omega_m (t - n\Delta t), \qquad (1)$$

где $\Delta t = 1/(2f_m)$ – интервал дискретизации функции $s(t)$, $s(n\Delta t)$ — выборки (отсчеты) функции $s(t)$ в моменты времени $n\Delta t$.

Заметим, что функции $\sin c\omega_m(t-n\Delta t)$ представляют собой импульсные характеристики идеального фильтра с прямоугольной АЧХ и частотами среза $\pm\omega_m$, смещенные на интервалы времени $n\Delta t$. Для того, чтобы восстановить непрерывный сигнал $s(t)$ из дискретного, достаточно последовательность его отсчетов $s(n\Delta t)$ подать на указанный идеальный фильтр.

При разработке теории связи К. Шенноном была принята модель, согласно которой ограниченный по частоте сигнал, имеющий длительность ΔT, может быть представлен в виде конечной суммы ряда (1), содержащей $N = 2f_m\Delta T$ слагаемых.

Однако, такая модель приводит к противоречивости теории связи и возникновению систематических погрешностей при технической реализации теоретических положений.

Во-первых, предположение об ограниченности сигнала по длительности и по частоте противоречит свойствам прямого и обратного преобразований Фурье.

Во-вторых, для точного восстановления непрерывного сигнала по его выборкам требуется идеальный фильтр, который, согласно известной теореме Р. Пэли и Н. Винера физически не реализуется и противоречит принципу причинности [5].

При технической реализации КО указанные противоречия приводят к появлению МКП и МСИ, а в случае необходимости восстановления на приемном конце непрерывного сигнала – к погрешности восстановления.

Кроме того, стоит отметить, что схема устройство обработки сигналов приемной части КО определяет ковариацию каждого сигнала алфавита с принимаемой смесью сигнала и шума. Т.е. выполнять требование полноты системы базисных функций нет необходимости.

МКП возникают в результате того, что сигналы, передаваемые в соседних каналах связи, из-за неидеальности АЧХ каналов перестают быть ортогональными.

МСИ является следствием потери ортогональности сигналами, с помощью которых передаются символы сообщения.

Вообще говоря, многие задачи науки и техники связаны с разложениями функций в ряды. Наиболее широко применяются разложения функций в ряды по системам ортогональных функций, по вейвлетам, разложение Карунена-Лоева-Пугачева (К-Л-П-разложение).

При анализе общих свойств систем ортогональных функций и для получения таких систем используются теория специальных функций и теория линейных интегральных преобразований.

Метод исследования ортогональных рядов, предлагаемый теорией специальных функций, основан на изучении дифференциальных свойств веса ортогональности этих функций [6]. В соответствии с данным методом теория специальных функций строится следующим образом. Через дифференциальное уравнение веса ортогональности вводится понятие классических ортогональных полиномов. Выводится формула Родрига – дифференциальное уравнение, решением которого являются классические ортогональные полиномы. Путем обобщения формулы Родрига на нецелые значения степени и комплексные значения коэффициентов уравнения в рассмотрение вводится дифференциальное уравнение гипергеометрического типа. Решением данного уравнения являются гипергеометрические, вырожденные гипергеометрические функции и функции Эрмита. С помощью замены переменных устанавливается связь уравнений гипергеометрического типа с обобщенными уравнениями гипергеометрического типа, при решении которых получаются цилиндрические и гипергеометрические функции.

В соответствии с указанной теорией вес ортогональности должен быть неотрицательной функцией.

В теории специальных функций обосновывается метод ортогонализации Грамма-Шмидта, который позволяет из системы линейно независимых функций получить ансамбль ортогональных функций.

Указанная теория позволяет вычислять ортогональные функции по известному весу, но не отвечает на вопрос, как определить вес ортогональности для уже известных линейно независимых функций. Кроме того, метод ортогонализации Грамма-Шмидта не дает возможность в полной мере использовать преимущества многих линейно независимых функций, поскольку получаемые ортогональные функции по форме отличаются от исходных. Например, большей частью системы вейвлетов представляют собой системы линейно независимых неортогональных функций. Ряды по вейвлетам сходятся быстро, поскольку базисные функции «похожи» на раскладываемую функцию [7]. Использование указанного метода ортогонализации приводит к снижению скорости сходимости рядов.

В теории линейных интегральных преобразований доказывается, что собственные функции этих преобразований ортогональны.

Частным случаем линейных интегральных преобразований являются гильбертовы преобразования с воспроизводящим ядром (ГПВЯ). Для пространств функций, описываемых с помощью собственных функций ГПВЯ, доказываются теоремы отсчетов. Наиболее известная из них теорема отсчетов В. А. Котельникова.

При исследовании случайных процессов рассматривается К-Л-П-разложение. Доказывается, что координатные функции данного разложения являются собственными функциями линейного интегрального преобразования с ядром в виде корреляционной функции исследуемого случайного процесса. Дисперсии коэффициентов разложения случайного процесса по таким функциям представляют собой собственные числа данного интегрального преобразования. Коэффициенты К-Л-П-разложения оказываются некоррелированными между собой, следовательно, получаемый ряд сходится быстро.

Однако, практическое применение разложения Карунена-Лоева-Пугачева связано с большими вычислительными затратами при определении координатных функций.

В 2010 году Петровым Д. А. защищена диссертация [8], в которой разработаны математические методы синтеза конечномерных, дискретных обобщенных базисов Вейля-Гейзенберга с заданными параметрами, обладающие хорошей локализацией одновременно и в частотной и во временной области. Указанные базисы получаются смещением на кратные интервалы времени некоторой формирующей функции. Показано, что формирующая функция по форме близка к функции Гаусса. Доказаны условия ортогональности обобщенных базисов Вейля-Гейзенберга, сформулированные в виде специальных условий на формирующую функцию и критерии отсутствия межканальной и межсимвольной интерференции. Однако, автор работы сам признает сложность получения рассматриваемых базисов, и отмечает, что ортогональность базиса возможна при определенных условиях, связанных с изменением формы формирующей функции и интервалом смещения функций друг относительно друга.

Существующая научная проблема заключается в следующем.

С одной стороны, существующая теория связи, построенная с помощью математического аппарата классической теории ортогональных функций не позволяет одновременно снизить уровни МСИ и МКП. С другой стороны, практическая реализация оптимальных по критерию максимального правдоподобия приемников сигналов нестрого использует понятие полноты ортогональных функций, что позволяет введением дополнительных условий повысить частотную эффективность систем передачи информации.

Таким образом, для увеличения предельной скорости передачи сигналов необходимо выйти за рамки теоремы В. А. Котельникова, для чего сформировать новую систему функций, для которой сформулировать условия, аналогичные условиям ортогональности. Целью работы является создание метода описания сигналов, который позволяет снизить влияние МСИ и МКП на правильный прием сообщений в системах связи с частотным разделением абонентов.

Для формирования новой системы функций будем использовать метод ортогонализации функций, основанный на определении веса ортогональности, предложенный в работе [9].

1. Обоснование метода ортогонализации линейно независимых функций

Рассмотрим систему N неслучайных линейно независимых функций $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, ..., $\phi_N(t)$ [9]. Введем в рассмотрение функцию $h(t)$ такую, что выполняются условия:

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t)\phi_j(t)h(t)dt = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j, \end{cases} \tag{2}$$

где (t_1, t_2) – интервал выполнения условий (2).

Можно говорить о том, что функции $\phi_1(t)$, $\phi_2(t), ..., \phi_N(t)$ являются ортогональными с весом $h(t)$ на интервале $(t_1,\ t_2)$.

Норма получаемого функционального пространства

$$\|\phi_i(t)\| = \left(\int_{t_1}^{t_2} \phi_i^2(t)h(t)dt\right)^{1/2} \geq 0.$$

существует, поскольку в соответствии с условиями (2) выражение под знаком корня принимает положительные значения.

Лемма 1 [9]. Пусть заданы системы линейно независимых функций $\phi_1(t)$,

$\phi_2(t), ..., \phi_N(t)$ и $l_1(t)$, $l_2(t), ..., l_k(t)$, тогда система из $k = N(N+1)/2$ уравнений

$$\begin{gathered}
b_1 \int\limits_{t_1}^{t_2} \phi_1^2(t) l_1(t) dt + b_2 \int\limits_{t_1}^{t_2} \phi_1^2(t) l_2(t) dt + ... + b_k \int\limits_{t_1}^{t_2} \phi_1^2(t) l_k(t) dt = 1, \\
b_1 \int\limits_{t_1}^{t_2} \phi_1(t)\phi_2(t) l_1(t) dt + ... + b_k \int\limits_{t_1}^{t_2} \phi_1(t)\phi_2(t) l_k(t) dt = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
b_1 \int\limits_{t_1}^{t_2} \phi_N^2(t) l_1(t) dt + b_2 \int\limits_{t_1}^{t_2} \phi_N^2(t) l_2(t) dt + ... + b_k \int\limits_{t_1}^{t_2} \phi_N^2(t) l_k(t) dt = 1.
\end{gathered} \tag{3}$$

имеет решение относительно b_i, то функция $h(t) = \sum\limits_{i=1}^{k} b_i l_i(t)$, является весом ортогональности функций $\phi_1(t)$, $\phi_2(t), ..., \phi_N(t)$. Алгоритм ортогонализации, вытекающий из леммы 1, неудобен тем, что для определения веса ортогональности N функций $\phi_1(t)$, $\phi_2(t), ..., \phi_N(t)$ необходимо вводить $k = N(N+1)/2$ функций $l_1(t)$, $l_2(t), ..., l_k(t)$, составляющих эту весовую функцию. Кроме того, численный эксперимент показывает, что в зависимости от того, какие функции $l_i(t)$ выбраны, можно получить различные значения величины

$$I = \int\limits_{t_1}^{t_2} h^2(t) \mathrm{d}t, \tag{4}$$

называемой энергией веса.

Лемма 2 [9]. Вес, оптимальный по условию минимума энергии, представляет собой квадратичную форму от ортогонализуемых функций.

$$h(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_{mn} \phi_n(t) \phi_m(t). \tag{5}$$

Для того, чтобы определить множители Лагранжа, достаточно подставить выражение (5) в уравнения (2).

Энергия веса (4), равна сумме

$$I = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_{nn}.$$

2. Апробация метода ортогонализации

Определим весовые функции ортогональности полиномов Чебышева.

Известно, что полиномы Чебышева $\mathrm{T}_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ортогональны на интервале $(-1, 1)$ с весом $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Согласно предложенному методу ортогонализации оптимальный по условию минимума энергии вес ортогональности функций $\mathrm{T}_n(x)$ должен иметь вид

$$h(x) = \sum_{i=j}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{ij} \mathrm{T}_i(x) \mathrm{T}_j(x). \tag{6}$$

Учитывая свойства произведения полиномов Чебышева, имеем

$$\mathrm{T}_i(x)\mathrm{T}_j(x) = \begin{cases} \mathrm{T}_i(x), j = 0, \\ \dfrac{1}{2}\mathrm{T}_{j+i}(x) + \dfrac{1}{2}\mathrm{T}_{j-i}(x), j \neq 0. \end{cases} \tag{7}$$

Откуда получаем

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \mathrm{T}_n(x), \tag{8}$$

где β_n – некоторые постоянные коэффициенты.

Нетрудно заметить, что число n является четным. Таким образом, $h(x)$ является четной функцией. Запишем условия ортогональности $\mathrm{T}_n(x)$ с весом $h(x)$:

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} \mathrm{T}_0^2(x) h(x) \mathrm{d}x = c_0, \\ &\int_{-1}^{1} \mathrm{T}_0(x)\mathrm{T}_1(x) h(x) \mathrm{d}x = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\int_{-1}^{1} \mathrm{T}_n^2(x) h(x) \mathrm{d}x = c_1, \\ &\int_{-1}^{1} \mathrm{T}_n(x)\mathrm{T}_{n+1}(x) h(x) \mathrm{d}x = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{9}$$

Пределы интегрирования в данном случае задаются областью определения функции $\arccos(x)$. Принимая во внимание свойства произведения полиномов Чебышева (7), систему уравнений (9) перепишем в виде:

$$\begin{aligned} &\beta_0 \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{T}_0(x)\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{T}_n(x)\mathrm{d}x = c_0, \\ &\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{T}_{n-k}(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{T}_{n+k}(x)\mathrm{d}x = 0, k \neq 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Поскольку $\int\limits_{-1}^{1} \cos(n \arccos x)\mathrm{d}x = -\frac{1+(-1)^n}{n^2-1}$, и n – четное число, из (10) получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \left[\frac{1}{4(n-k)^2 - 1} + \frac{1}{4(n+k)^2 - 1}\right] = \begin{cases} \dfrac{c_0}{2}, k = 0, \\ 0, k \neq 0. \end{cases} \tag{11}$$

Можно показать, что система (11) разрешима относительно коэффициентов β_n методом редукции, поскольку сходится последовательность решений частных систем уравнений, полученных из (11) ограничением числа неизвестных. Получаемые весовые функции при увеличении числа полиномов $\mathrm{T}_n(x)$ сходятся к функции $1/(\pi\sqrt{1-x^2})$, которая в таком случае является весом, оптимальным по условию минимума энергии.

Аналогичные вычисления можно провести для полиномов Эрмита. Вес ортогональности полиномов Эрмита необходимо искать в виде

$$h(x) = \sum_{i=j}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{ij} \mathrm{H}_i(x) \mathrm{H}_j(x). \tag{12}$$

Поскольку произведение полиномов Эрмита имеет вид

$$\mathrm{H}_m(x)\mathrm{H}_n(x) = \sum_{k=0}^{\min(m,n)} 2^k k! C_m^k C_n^k \mathrm{H}_{m+n-2k}(x), \tag{13}$$

где

$$C_n^k = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!}, 0 \le k \le n, \\ 0, 0 \le n < k, \end{cases}, \quad C_m^k = \begin{cases} \dfrac{m!}{k!(m-k)!}, 0 \le k \le m, \\ 0, 0 \le m < k. \end{cases}$$

имеем

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \mathrm{H}_k(x). \tag{14}$$

Решение уравнений относительно λ_k методом редукции приводит к известной весовой функции e^{-x^2}.

3. Новые системы ортогональных функций

Лемма 3 [9]. Бесконечномерный базис, с координатными функциями вида $\phi_n(t) = \frac{\sin\pi(t-\alpha n)}{\pi(t-\alpha n)}$, которые ортогональны с весом, имеющим минимальную энергию, существует при целых α (что совпадает с теоремой отсчетов В. А. Котельникова), нецелых $\alpha > 1$ и не существует при $\alpha < 1$.

Лемма 4 [9]. Функции вида $\phi_n(t) = \frac{\sin^2\pi(t-n)}{\pi^2(t-n)^2}$ образуют на бесконечном интервале полную ортонормированную систему с весовой функцией вида $h(t) = 3-4\sin^2\pi t$.

Лемма 5 [9]. Функции $\phi_n(t) = sinc^3\pi(t-n)$ на бесконечном интервале изменения аргумента ортогональны с весом $h(t) = \frac{280}{101}\cos^2\pi t - \frac{64}{101}\sin^4\pi t$.

Лемма 6 [9]. Функции $\phi_n(t) = sinc^3\pi(t-n)$ на бесконечном интервале изменения аргумента ортогональны с весом равным $h(t) = \frac{20}{7} - \frac{24}{7}\sin^2\pi t$.

Лемма 7 [9]. Функции вида $\phi_m(t) = sinc^n\pi(t-m)$, где n – целое число, ортогональны на бесконечном интервале изменения аргумента с весом $h(t) = \sum\limits_{i=1}^{\frac{n}{2}-\frac{1+(-1)^{n-1}}{4}+1} a_i(\sin\pi t)^{(i-\frac{1+(-1)^{i-1}}{2})}$, где a_i – коэффициенты тригонометрического полинома.

4. Критерии оценки точности представления сигналов в виде ортогональных рядов и свойства ортонормированного базиса

Пусть сигнал $x(t)$ приближенно описывается конечной суммой

$$x(t) \approx \sum_{n=0}^{N} y_n\phi_n(t).$$

Ошибка аппроксимации сигнала может быть выражена двумя различными критериями:

$$I_1 = M\left\{\int\limits_0^T [x(t) - \sum_{n=0}^{N} y_n\phi_n(t)]^2 h(t)dt\right\}, \tag{15}$$

$$I_2 = M\left\{\int\limits_0^T [x(t) - \sum_{n=0}^{N} y_n\phi_n(t)]^2 dt\right\}, \tag{16}$$

где $M\{...\}$ – оператор математического ожидания.

На практике добиваются минимума одного из функционалов I_1 или I_2, определяя оптимальный базис. В классической теории ортогональных рядов доказывается, что если вес ортогональности базисных функций является положительной функцией, то критерии (15) и (16) совпадают. В рассматриваемом случае вес $h(t)$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения, поэтому необходимо определить границы применения каждого критерия. При передаче сигналов по цифровым каналам связи различают два процесса: передачу данных и передачу непрерывных сообщений.

При передаче информации существенным является наиболее точное представление сигнала суммой, поэтому необходимо добиваться минимума I_2. На приемном конце решение о том, какой символ был передан, может быть принято по величине коэффициентов разложения по ортогональному базису переданного сигнала, и, следовательно, необходимо минимизировать I_1.

5. Особенности ортогонализации физически реализуемых функций

На практике осуществляют аппроксимацию идеальных характеристик КО и переходят к фильтрам Чебышева, Баттерворта, Бесселя и эллиптическим фильтрам порядка N. Передаточные функции указанных фильтров

$$K_{\text{ФНЧ}}(s) = K_{\text{ФНЧ}} \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{N}(s - p_j)},$$

($K_{\text{ФНЧ}}$ – коэффициент усиления фильтра) имеют простые полюсы p_jи, следовательно, импульсные характеристики вида

$$\phi_0(t) = 1(t) \sum_{k=1}^{N/2} A_k \mathrm{e}^{\sigma_k t} \sin(\omega_k t + \vartheta_k), \tag{17}$$

если N – четное число;

$$\phi_0(t) = 1(t) A_0 \mathrm{e}^{\sigma_0 t} + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} A_k \mathrm{e}^{\sigma_k t} \sin(\omega_k t + \vartheta_k), \tag{18}$$

если N – нечетное число, где $1(t)$ – функция Хевисайда, A_0, A_k, ϑ_k – некоторые известные постоянные величины, σ_k и ω_k – вещественная и мнимая части k-го полюса передаточной функции КО:$\sigma_k + \mathrm{j}\omega_k = p_k$.

Введем в рассмотрение систему функций, полученных путем смещения импульсной характеристики ФНЧ на временной интервал α

$$\phi_m(t) = 1(t - m\alpha)\phi_0(t - m\alpha), \tag{19}$$

В работе [9] показано, что соблюсти условия ортогональности можно лишь для первых N функций $\phi_m(t)$, т.е. система функций, составленная из эквидистантно смещенных импульсных характеристик КО, может быть только квазиортогональной системой. Повышение порядка фильтра приводит к снижению погрешности условий ортогональности. В качестве примера в [9] рассматривались системы функций, составленные из смещенных импульсных характеристик нормированных фильтров Баттерворта.

6. Условия сохранения ортогональности эквидистантно смещенных импульсных характеристик при преобразовании нормированных фильтров

На практике расчет КО осуществляется путем преобразования характеристик нормированного фильтра-прототипа (НФП).

Нормированный фильтрпрототип (НФП) можно охарактеризовать длительностью переходного процесса $t_{ux} \cong 5\tau_k$, где τ_k – максимальная постоянная времени, соответствующая минимальному затуханию σ_k, которое, в свою очередь, соответствует k-ому полюсу p_k.

Тогда интервал смещения α импульсных характеристик, который позволяет получить квазиортогональную систему функций, определяется как

$$\alpha = \frac{t_{ux}}{N} = \frac{5\tau_k}{N} = \frac{5}{\sigma_k N}.$$

Импульсная характеристика $g(t)$ НФП записывается в виде (17).

Преобразование передаточной функции НФП $K_{\text{НФП}}(p)$ в передаточную функцию ФНЧ $K_{\text{ФНЧ}}(p)$ с частотой среза ω_c по уровню 3 дБ осуществляется путем формальной замены p на $\frac{p}{\omega_c}$. В работе [9] показано, что преобразование НФП и ФНЧ с частотой среза ω_c по уровню 3 дБ не изменяет условия ортогональности эквидистантно смещенных импульсных характеристик.

Преобразование передаточной функции НФП $K_{\text{НФП}}(p)$ в передаточную функцию полосового фильтра (ПФ) $K_{\text{ПФ}}(p)$ с полосой пропускания $\Delta\omega$ по уровню 3 дБ и центральной частотой ω_0 осуществляется путем формальной замены p на $\frac{p^2+\omega_0^2}{\Delta\omega p}$. Заметим, что $\Delta\omega = 2\omega_c$.

В этом случае порядок ПФ $N_{\text{ПФ}} = 2N$, а корню p_k характеристического уравнения НФП соответствует два корня $\hat{p}_{k1}$ и $\hat{p}_{k2}$ характеристического уравнения ПФ.

Расчеты показывают, что преобразование НФП в ПФ с полосой пропускания $\Delta\omega$, определяемой по уровню 3 дБ, не изменяет условия ортогональности эквидистантно смещенных импульсных характеристик. При этом необходимо соблюдение условий

$$\omega_0\hat{\alpha} = 2\pi l, \hat{\alpha} = \frac{\hat{t}_{ux}}{N},$$

где $\hat{\alpha}$ – интервал смещения импульсных характеристик ПФ, $\hat{t}_{ux}$ – длительность переходного процесса ПФ.

7. Обоснование метода борьбы с межсимвольными и межканальными помехами

Рассмотрим отношение сигнал/шум на выходе коррелятора классической системы передачи информации (СПИ), принимающего символ a_0.

Передаваемый сигнал записывается как

$$s(t) = a_0\phi_0(t) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} a_n\phi_n(t). \tag{20}$$

С учетом реализации белого шума $n(t)$, входной сигнал коррелятора имеет вид

$$r(t) = a_0\phi_0(t) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} a_n\phi_n(t) + n(t). \tag{21}$$

Выходной сигнал коррелятора имеет вид

$$z = a_0\int\limits_T r(t)\phi_0(t)dt = a_0^2\int\limits_T \phi_0^2(t)dt + a_0\int\limits_T \phi_0(t)\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} a_n\phi_n(t)dt + a_0\int\limits_T n(t)\phi_0(t)dt =$$

$$= a_0^2E_{00} + a_0\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} a_nE_{0n} + n,$$

где T – интервал ортогональности функций $\phi_n(t)$, n – компонента, обусловленная влиянием гауссовского шума, $E_{00} = \int\limits_T \phi_0^2(t)dt$, $E_{0n} = \int\limits_T \phi_0^(t)\phi_n(t)dt$ – величина обусловленная наличием МСИ, возникающей вследствие потери ортогональности функциями $\phi_n(t)$.

Энергия полезной компоненты принимаемого сигнала равна

$$E = a_0^2E_{00},$$

поэтому

$$a_0 = \sqrt{\frac{E}{E_{00}}}. \tag{22}$$

Дисперсия величины n равна

$$\sigma^2 = M\{n^2\} - M^2\{n\} = M\left\{a_0^2\int\limits_T n(t)\phi_0(t)dt\int\limits_T n(\tau)\phi_0(\tau)d\tau\right\} =$$

$$= a_0^2\int\limits_T\int\limits_T M\{n(t)n(\tau)\}\phi_0(t)\phi_0(\tau)d\tau dt.$$

Здесь учтено, что случайная величина n имеет нулевое среднее значение.

Поскольку гауссовский случайный процесс является дельта коррелированным, то

$$M\{n(t)n(\tau)\} = \frac{N_0}{2}\delta(t-\tau),$$

и

$$\sigma^2 = a_0^2 \int\limits_T \int\limits_T \frac{N_0}{2}\delta(t-\tau)\phi_0(t)\phi_0(\tau)d\tau dt = a_0^2\frac{N_0}{2}\int\limits_T \phi_0^2(\tau)d\tau = a_0^2\frac{N_0}{2}E_{00} = \frac{N_0 E}{2},$$

где $\frac{N_0}{2}$ – спектральная плотность мощности белого шума.

Среднее квадратическое значение величины n оценивается как

$$\sigma = \sqrt{\frac{N_0 E}{2}}.$$

С учетом приведенных соотношений оценка выходного сигнала коррелятора запишется в виде

$$z = E + \frac{E}{E_{00}}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} \mathrm{sign}(a_n)E_{0n} + \sqrt{\frac{N_0 E}{2}},$$

где компонента $\frac{E}{E_{00}}\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} \mathrm{sign}(a_n)E_{0n}$ обусловлена влиянием МСИ, $\mathrm{sign}(x)$– функция знака. В худшем случае отношение сигнал/шум на выходе классического коррелятора с учетом МСИ имеет вид

$$\rho_{0\text{МСИ}} = \frac{E + \frac{E}{E_{00}}\sum\limits_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} \mathrm{sign}(a_n)E_{0n}}{\sqrt{\frac{N_0 E}{2}}} = \rho_0\left(1 + \frac{1}{E_{00}}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} \mathrm{sign}(a_n)E_{0n}\right),$$

где $\rho_0 = \sqrt{\frac{2E}{N_0}}$ – отношение сигнал/шум на выходе коррелятора без учета МСИ.

Вероятность ошибки приема символа a_0, при условии, что информация передается противоположными сигналами, определяется из соотношения

$$p = \frac{1}{2^m}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times \exp\left\{-\frac{\left(E + \frac{\mathrm{sign}(a_n)EE_{0n}}{E_{00}}\right)^2}{2\sigma^2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2^m}\sum_{n=1}^{m} Q\left\{\frac{\rho_0}{E_{00}}(E_{00} + E_{0n}\mathrm{sign}a_n)\right\},$$

где m – число учитываемых интерферирующих символов

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Рассмотрим возможность снижения уровня МСИ и МКП путем использования базиса, для которого выполняются соотношения (2). В этом случае приемная часть системы передачи информации должна содержать несколько каналов, в состав которых входят корреляторы для приема отдельных символов сообщения. В идеальном случае элементарными сигналами, с помощью которых передаются символы сообщения, являются функции вида (19). Определим вероятность ошибки на выходе коррелятора одного из каналов приемной части системы передачи информации. Будем считать, что этот коррелятор служит для приема информационного символа a_0.

Передаваемый сигнал записывается в виде (20). С учетом реализации белого шума $n(t)$, входной сигнал коррелятора имеет вид (21).

В силу ортогональности с весом $h(t)$ функций $\phi_n(t)$ выходной сигнал коррелятора имеет вид

$$z_h = a_0 \int\limits_T r(t)\phi_0(t)h(t)\mathrm{d}t = a_0^2 \int\limits_T \phi_0^2(t)h(t)\mathrm{d}t + a_0 \int\limits_T n(t)\phi_0(t)h(t)\mathrm{d}t =$$

$$= a_0^2 A_{00} + n_h,$$

где n_h – компонента, обусловленная влиянием гауссовского шума.

Дисперсия величины n_h равна

$$\sigma_h^2 = M\{n_h^2\} - M^2\{n_h\} = M\left\{a_0^2 \int\limits_T n(t)\phi_0(t)h(t)dt \int\limits_T n(\tau)\phi_0(\tau)h(\tau)d\tau\right\} =$$

$$= a_0^2 \int\limits_T \int\limits_T M\{n(t)n(\tau)\}\phi_0(t)h(t)\phi_0(\tau)h(\tau)d\tau dt.$$

Здесь учтено, что случайная величина n_h имеет нулевое среднее значение.

Поскольку гауссовский случайный процесс является дельта коррелированным, то

$$\sigma_h^2 = a_0^2 \int\limits_T \int\limits_T \frac{N_0}{2}\delta(t-\tau)\phi_0(t)h(t)\phi_0(\tau)h(\tau)d\tau dt = a_0^2\frac{N_0}{2} \int\limits_T \phi_0^2(\tau)h^2(\tau)d\tau = a_0^2\frac{N_0}{2}H,$$

где $H = \int\limits_T \phi_0^2(\tau)h^2(\tau)d\tau$.

С учетом (22) дисперсия σ_h^2 представляется в виде

$$\sigma_h^2 = \frac{H}{E_{00}}\frac{EN_0}{2}.$$

Отношение сигнал/шум на выходе рассматриваемого устройства составит

$$\rho_h = \frac{A_{00}\frac{E}{E_{00}}}{\sqrt{\frac{N_0 E}{2}}\sqrt{\frac{H}{E_{00}}}} = \rho_0 \frac{A_{00}}{\sqrt{E_{00}H}}.$$

Вероятность ошибки приема символа a_0, при условии, что информация передается противоположными сигналами, определяется соотношением

$$p_h = Q\left\{\rho_0 \frac{A_{00}}{\sqrt{E_{00}H}}\right\}.$$

Рассмотрим коэффициент при ρ_0.

$$\frac{A_{00}}{\sqrt{E_{00}H}} = \frac{\int\limits_T \phi_0^2(\tau)h(\tau)\mathrm{d}\tau}{\sqrt{\int\limits_T \phi_0^2(\tau)d\tau \int\limits_T \phi_0^2(\tau)h^2(\tau)d\tau}}. \tag{23}$$

На основании неравенства Буняковского-Шварца получаем

$$\int\limits_T \phi_0^2(\tau)h(\tau)d\tau \leq \sqrt{\int\limits_T \phi_0^2(\tau)d\tau \int\limits_T \phi_0^2(\tau)h^2(\tau)d\tau},$$

следовательно

$$\frac{A_{00}}{\sqrt{E_{00}H}} \leq 1. \tag{24}$$

Равенство в выражении (24) достигается только в классическом случае, когда $h(\tau) = 1$.

Таким образом, рассматриваемый коррелятор при отсутствии МСИ даст меньшее отношение сигнал/шум, чем классический. Однако, в случае действия межсимвольной интерференции может быть получен некоторый выигрыш по помехоустойчивости. Этот выигрыш в большей степени определяется отношением (23).

Вес ортогональности кроме выполнения условий (2) должен обеспечивать максимальное значение отношения (24).

Пусть в соседних каналах связи информация передается с помощью сигналов $\phi_{k,n}(t) = \phi_{0,k}(t - \frac{\pi n}{\omega_m})$, $\phi_{k-1,n}(t) = \phi_{0,k-1}(t - \frac{\pi n}{\omega_m})$, $\phi_{k+1,n}(t) = \phi_{0,k+1}(t - \frac{\pi n}{\omega_m})$. Сигналы $\phi_{k-1,n}(t)$ и $\phi_{k+1,n}(t)$ соседних каналов не будут влиять на прием сигналов $\phi_{k,n}(t)$ основного канала, если выполняются условия

$$J_{k,k} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi_{k,0}(t)\phi_{k,n}(t)h(t)dt = \begin{cases} A_{00}, n = 0, \\ 0, n \neq 0, \end{cases}$$

$$J_{k,k-1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi_{k,0}(t)\phi_{k-1,n}(t)h(t)dt = 0,$$

$$J_{k,k+1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi_{k,0}(t)\phi_{k+1,n}(t)h(t)dt = 0.$$

Проведенные численные эксперименты, позволяют сделать вывод о том, что, несмотря на погрешность ортогонализации физически реализуемых элементарных сигналов, можно подобрать вес, который позволяет снизить влияние МСИ и МКП на правильный прием символов сообщений, и сколь угодно близко приблизиться к равенству в выражении (24).

Список цитируемых источников

1. *Зюко А. Г.* Помехоустойчивость и эффективность систем передачи информации / А. Г. Зюко и др. – М.: Радио и связь, 1985. – 272 с.

   Zuko A. G. Noise immunity and efficiency of information transmission systems / A. G. Zyuko et al. – M.: Radio and communications, 1985. – 272 s.

2. *Кловский, Д. Д.* Инженерная реализация радиотехнических схем / Д. Д. Кловский, Б. И. Николаев. – М.: Связь, 1975. – 200 с.

   Klovsky, D. D. Engineering implementation of radio schemes / D. D. Klovsky, B. I. Nikolaev. – Moscow: Svyaz, 1975. – 200 p.

3. *Любопытов, В. С.* Компенсация межсимвольной интерфернции в цифровых каналах на основе дробно-интервальной предварительной коррекции: дис. … канд. техн. наук: 05.12.13 / Любопытов Владимир Сергеевич. – Уфа, 2013. – 188 с.

   Ljubomirov, V. P. the Compensation of the intersymbol interference in digital channels based on a fractional-interval pre-correction: dis. ... Cand. tech. Sciences: 05.12.13 / Liubomirov Vladimir Sergeevich. – Ufa, 2013. – 188 p.

4. *Гоноровский, И. С.* Радиотехнические цепи и сигналы / И. С. Гоноровский. – М.: Сов. Радио, 1971. – 672 с.

   Gonorovsky I. C. Radio circuits and signals / I. S. Gonorovsky. – M.: Sov. Radio, 1971. – 672 p.

5. *Сиберт, У. М.* Цепи, сигналы, системы: в 2 ч. / У. М. Сиберт. – М.: Мир, 1988. – Ч. 2. – 359 с.

   Siebert, U. M. Circuits, signals, systems: in 2 h. / U. M. Siebert. – Moscow: Mir, 1988. – CH. 2. – 359 p.

6. *Никифоров, А. Ф.* Основы теории специальных функций / А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров. – М.: Наука, 1974. – 304 с.

   Nikiforov, A. F. Fundamentals of the theory of special functions / A. F. Nikiforov, V. B. Uvarov. – Moscow: Nauka, 1974. – 304 p.

7. *Астафьева, Н. М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения / Н. М. Астафьева // Успехи физических наук, 1996. – Т. 166. – № 11. – С. 1145-1170.

   Astafyeva, N. M. Wavelet analysis: fundamentals of theory and application examples / N. M. Astafyeva // Advances in physical Sciences, 1996. – T. 166. – No. 11. – Pp. 1145-1170.

8. *Петров, Д. А.* Синтез хорошо-локализованных конечномерных базисов Вейля-Гейзенберга и их применение для построения высокоэффективных алгоритмов обработки сигналов: дис. … докт. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Петров Дмитрий Андреевич. – М., 2010. – 144 с.

Petrov, D. A. Synthesis of well-localized finite-dimensional Weyl-Heisenberg bases and their application for the construction of high-performance signal processing algorithms: dis. ... Doct. Fiz.-Mat. Sciences: 05.13.18 / Petrov Dmitry Andreevich. – M., 2010. – 144 p.

9. *Дегтярев, А. Н.* Ортогонализация функций и повышение помехоустойчивости высокоскоростных систем передачи информации / А. Н. Дегтярев. – М.: Инфра-М, 2015. – 152 с.

Degtyarev, A. N. Orthogonalization of functions and increase of noise immunity of high-speed information transmission systems / A. N. Degtyarev. – Moscow: Infra-M, 2015. – 152 p.

Получена 06.04.2019

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ за 2019 г.

РЕФЕРАТЫ

УДК 517.9

V. A. ZAGREBNOV. **Приближения разрешающего оператора неавтономной задачи Коши формулами произведений** (английский) // Динамические системы, 2019. — Том 9(37), №4. — С. 321–366.

В работе предсталены метод Холанда-Эванса-Найдхарда для приближений разрешающего оператора неавтономной задачи Коши (неАЗК) в Банаховом пространстве формулами проиведений. Основная идея заключается в переформулировке исходной задачи в расширенном Банаховом пространстве таким образом, что неАЗК становится АЗК, порождающей эволюционную полугруппу операторов на расширенном пространстве. Метод устанавливает взаимно-однозначное соотвествие между разрешающим оператором неАЗК и эволюционной полугруппой АЗК. Последнее позволяет использовать для приближений разрешающего оператора хорошо развитую технику формул проиведений для операторных полугрупп. Этот подход даёт также возможность установить скорость сходимости приближений разрешающего оператора неАЗК в операторной топологии исходного Банаховом пространства.

Ключевые слова: Формула произведения Троттера, скорость сходимости, аппроксимация, эволюционные уравнения, оператор решения, теория расширений, теория возмущений, операторное расщепление

Библиогр. 32 назв.

УДК 517.929.4

М. А. СКВОРЦОВА. **Асимптотические свойства решений в модели хищник-жертва с двумя запаздываниями** (русский) // Динамические системы, 2019. — Том 9(37), №4. — С. 367–389.

Рассматривается система дифференциальных уравнений с двумя запаздываниями, описывающая взаимодействие популяций хищников и жертв. Модель учитывает возрастную структуру популяций, при этом параметры запаздывания отвечают за время взросления хищников и жертв соответственно. В работе изучаются асимптотические свойства решений рассматриваемой системы. Указано множество начальных вектор-функций, при которых решения сходятся к положению равновесия, соответствующему совместному сосуществованию популяций хищников и жертв. Установлены оценки решений, характеризующие скорость стабилизации на бесконечности к данному положению равновесия. Результаты получены с использованием модифицированных функционалов Ляпунова – Красовского.

Ключевые слова: модель хищник-жертва, уравнения с запаздывающим аргументом, асимптотическая устойчивость, оценки решений, множество притяжения, модифицированные функционалы Ляпунова – Красовского.

Библиогр. 20 назв.

УДК 517.957+517.312

А. А. КОРНУТА, В. А. ЛУКЬЯНЕНКО. **Функционально-дифференциальные уравнения параболического типа с оператором инволюции** (русский) // Динамические системы, 2019. — Том 9(37), №4. — С. 390–409.

В работе рассматриваются важные для приложений нелинейной оптики математические модели в виде нелинейных функционально-дифференциальных уравнений параболического типа с обратной связью и преобразованием пространственных переменных (которое задаёт оператор инволюции). Свойство оператора инволюции (поворот, отражение) позволяет свести исходное уравнение к системе уравнений без преобразования пространственных переменных. Множество решений таких уравнений определяется двумя параметрами: малым — коэффициентом диффузии и большим —коэффициентом интенсивности потока. Уравнение задаётся на кольцевой области с условиями третьего рода в классе периодических функций. Исследуются важные частные случаи стационарных и нестационарных решений. Для стационарного решения, зависящего только от угловой координаты подробно исследуется характер точек покоя и их устойчивость. Многообразие решений частных уравнений наследуется и в общем случае. Найденные частные решения используются для построения асимптотических решений исходных уравнений. В работе приводятся соответствующие ссылки на публикации авторов.

Ключевые слова: оптические системы, нелинейные среды керровского типа, параболические нелинейные уравнения, оператор инволюции,устойчивость частных решений.

Ил. 17. Библиогр. 21 назв.

УДК 621.391

А. Н. ДЕГТЯРЕВ. **Метод ортогонализации и его применение в теории связи** (русский) // Динамические системы, 2019. — Том 9(37), №4. — С. 410–427.

Рассматривается метод ортогонализации, основанный на определении веса ортогональности. Указанный вес может быть знакопеременной функцией. Непротиворечивость метода известным положениям показана на примере полиномов Чебышева и Эрмита. Получены ортогональные с весом системы эквидистантных функций. Показано, что базис, составленный из смещенных на кратные интервалы времени импульсных характеристик физически реализуемых линейных систем, является квазиортогональным. Установлено, что преобразование нормированного фильтра-прототипа в фильтры нижних частот и в полосовые фильтры с заданными характеристиками не нарушает ортогональность базисных функций. Показано, что использование базиса, составленного из импульсных характеристик линейных систем позволяет снизить уровень межканальных и межсимвольных помех при передаче сообщений по каналам связи.

Ключевые слова: метод ортогонализации, системы ортогональных функций, помехоустойчивость систем передачи информации.

Библиогр. 9 назв.

ABSTRACTS

MSC 2010: 34G10, 47D06, 34K30, 47A55

V. A. ZAGREBNOV. **Product approximation of solution operators for non-autonomous Cauchy problems** (English). Dinamicheskie Sistemy **9(37)**, no.4, 321–366 (2019).

Studying product approximations of the non-autonomous Cauchy problem (nACP) solution operator in a Banach space X we use the Howland-Evans-Neidhardt approach. The main idea is to reformulate this problem as an autonomous Cauchy problem (ACP) in an extended Banach space $L^p(\mathcal{I}, X)$, $p \in [1, \infty)$, of X-valued functions on the time-interval $\mathcal{I}$. A fundamental observation is the one-to-one correspondence between solution operators of nACP on X and the evolution semigroups of ACP on $L^p(\mathcal{I}, X)$. We show that this relation allows to apply a full power of the operator-theoretical methods to scrutinise the nACP, including the proof of the product approximation formulae for solution operators with operator-norm estimate of the rate of convergence.

Keywords: Trotter product formula, convergence rate, approximation, evolution equations, solution operator, extension theory, perturbation theory, operator splitting.

Ref. 32.

MSC 2010: 34K20, 34K25, 92D25

M. A. SKVORTSOVA. **Asymptotic properties of solutions in a predator-prey model with two delays** (Russian). Dinamicheskie Sistemy **9(37)**, no.4, 367–389 (2019).

We consider a system of differential equations with two delays, which describes the interaction between predator and prey populations. The model takes into account the age structure of populations, herewith the delay parameters denote the time that predator and prey individuals need to become adult. In the paper we study asymptotic properties of solutions to the considered system. We describe a set of initial vector-functions, for which solutions converge to the equilibrium point corresponding to the coexistence of predator and prey populations. We establish estimates of solutions characterizing the rate of stabilization at infinity to this equilibrium point. The results are obtained using modified Lyapunov–Krasovskii functionals.

Keywords: predator-prey model, delay differential equations, asymptotic stability, estimates of solutions, attraction set, modified Lyapunov–Krasovskii functionals.

Ref. 20.

MSC 2010: 35K10, 35K55

A. A. KORNUTA, V. A. LUKIANENKO. **Functional-differential equations of parabolic type with the involution operator** (Russian). Dinamicheskie Sistemy **9(37)**, no.4, 390–409 (2019).

In this work, mathematical models important for applications of nonlinear optics are considered in the form of nonlinear functional differential equations of parabolic type with feedback and a transformation of spatial variables (which defines the involution operator). The property of the involution operator (rotation, reflection) allows us to reduce the original equation to a system of equations without transforming the spatial variables. The set of solutions of such equations is determined by two parameters: a small one — diffusion coefficient and a large one — coefficient of flow intensity. The equation is given on a ring domain with conditions of the third kind in the class of periodic functions. Important special cases of stationary and non-stationary solutions are investigated. For a stationary solution that depends only on the angular coordinate, the nature of the stationary points and their stability are studied in detail. The variety of solutions of particular equations is also inherited

in the general case. The particular solutions found are used to construct asymptotic solutions of the original equations. The work cites corresponding references to publications of the authors.

Keywords: optical systems, nonlinear Kerr type medium, parabolic nonlinear equations, involution operator, stability private solutions.

Fig. 17. Ref. 21.

MSC 2010: 4205

A. N. DEGTYARYOV. **Orthogonalization method and its application in communication theory** (Russian). Dinamicheskie Sistemy **9(37)**, no.4, 410–427 (2019).

The analysis of the reasons leading to the emergence of intersymbol and interchannel interference in information transmission systems is carried out. It is shown that the indicated interference occurs due to the fact that physically realizable elementary signals with the help of which information is transmitted are not orthogonal. It is established that, within the framework of the existing communication theory, the considered interference can not be simultaneously eliminated. It is shown that the known methods for obtaining systems of orthogonal functions do not satisfy the requirements for systems of physically realizable functions that approximate elementary signals. An orthogonalization method based on determining the weight of orthogonality is proposed. The peculiarity of the method is that it does not distort the shape of the original functions. The indicated weight may be an alternating function. The condition that the norm of functions is non-negative follows from the conditions of orthogonality. The concept of weight energy is introduced. It is shown that a weight satisfying the minimum energy condition is a quadratic form of orthogonalizable functions. The consistency of the method to the well-known propositions is shown by the example of chebyshev and hermite polynomials. It is shown that the weight functions known for classical orthogonal polynomials satisfy the condition of minimum weight energy. We obtained systems of equidistant functions that are orthogonal with weight, consisting of reference functions raised to an integer degree. For the transmission of messages, it is proposed to use the impulse response of physically realizable linear systems that are offset by multiple time intervals. It is shown that a basis composed of such functions is quasi-orthogonal. Quasi-orthogonality consists in the fact that the conditions of orthogonality can be strictly fulfilled only if the number of initial functions is equal to the order of the linear system. For the remaining equidistant functions, the orthogonality condition is satisfied with an error sufficient for practice. It is established that the conversion of the normalized prototype filter into lower-pass filters and into band-pass filters with specified characteristics does not violate the orthogonality of the basis functions. To evaluate the accuracy of representing signals in the form of orthogonal series, two criteria are proposed. One criterion is used to approximate the transmitted signal side by side, and the second – for the receiver to make a decision about the values of the coefficients of the series. Analytical dependences of the probability of error when receiving a message symbol for the case of transmission of information by opposite signals are obtained. It is shown that the use of a basis composed of equidistant biased impulse characteristics of linear systems can reduce the level of interchannel and intersymbol interference when transmitting mes-sages over communication channels.

Keywords: orthogonalization method, systems of orthogonal functions, noise immunity of information transmission systems.

Ref. 9.

Подписано в печать 30.12.2019. Формат 60x84/8.
Усл. печ. л. 13,49. Тираж 25 экз. Заказ № НП/346. Бесплатно.
Дата выхода в свет 16.06.2020.
Отпечатано в Издательском доме
ФГАОУ ВО «КФУ им. В. И. Вернадского»
295051, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7

Динамические системы

Том 9(37) №4 2019

Содержание

Dinamicheskie sistemy
(Dynamical Systems)

Volume 9(37) no.4 2019

Table of Contents